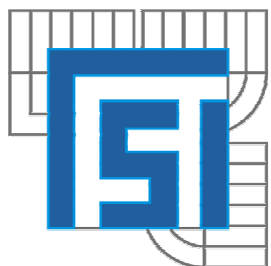


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

DEFORMAČNĚ-NAPĚŤOVÁ ANALÝZA VÝDUTÍ TEPEN STRESS-STRAIN ANALYSIS OF ANEURYSMS OF ARTERIES

DIPLOMOVÁ PRÁCE
DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Petr Mucha

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

BRNO 2008

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2007/08

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Mucha Petr

který/která studuje v **magisterském studijním programu**

obor: **Aplikovaná mechanika (3901T003)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Deformačně-napěťová analýza výdutí tepen

v anglickém jazyce:

Stress-strain analysis of aneurysms of arteries

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diplomový úkol je zaměřen na problematiku výpočtového modelování mechanického chování měkkých tkání, konkrétně stěny aneurysmatu břišní aorty.

Cíle diplomové práce:

1. Nastudovat a zvládnout problematiku výpočtového modelování konstitutivního chování tkání stěny tepny a analyzovat možnosti popisu jejích mezních stavů.
2. Vytvořit výpočtový model aneurysmatu břišní aorty, založený na dostupných programových systémech, zohledňující jeho reálnou geometrii a konstitutivní chování.
3. Provést analýzu napjatosti a deformace ve stěně aneurysmatu břišní aorty a na jejím základě se pokusit navrhnout kritérium pro hodnocení rizika ruptury aneurysmatu.

Seznam odborné literatury:

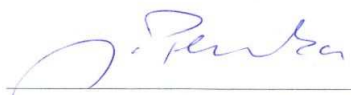
- 1.J.Křen, J.Rosenberg, P.Janiček: Biomechanika, Vydavatelství ZČU Plzeň, 1997.
- 2.Y.C.Fung: Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues. Springer New York, Berlin..., 1993.
- 3.Holzapfel G.A.: Computational Biomechanics of Soft Biological Tissue. Encyclopaedia of Computational Mechanics, 2004.
- 4.Biomechanics of Soft Tissue in Cardiovascular Systems. Ed. Holzapfel, Ogden. Springer, 2003.


Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2007/08.

V Brně, dne 23.11.2007




prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu


doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá vytvořením výpočtového modelu arteriální výdutě, zohledňujícího její reálnou geometrii a konstitutivní chování, a následným posouzením rizika ruptury na základě porovnání největšího hlavního napětí uvnitř stěny výdutě a intaktní aorty. V oblasti konstitutivního chování nabízí ucelený přehled a vzájemné srovnání všech dostupných konstitutivních (hyperelastických) modelů za předpokladu jejich objemové nestlačitelnosti. Hlavní motivací této práce je ale snaha o vytvoření metody pro nalezení „nezatížené“ = „beztlačivé“ = „prvotní“ = **zmenšené (redukované) geometrie**, kterou obecně neznáme. Doposud používané modely geometrie výdutě, pocházející ze snímků pořízených počítačových tomografem, představují vždy již deformovanou konfiguraci od krevního tlaku, axiálního protažení a reziduální napjatosti.

Klíčová slova: *hyperelastická, arteriální výduť, redukovaná geometrie*

ABSTRACT

This diploma thesis deals with the creation of computational model of arterial aneurysm, which respects its real geometry and constitutive behaviour. Subsequently there is explored the risk of rupture, comparing the values of the highest main stress in aneurysm's and intact aorta's wall. This thesis also offers the comprehensive summary and mutual comparison of current constitutive (hyperelastic) models, which are for simplicity isochoric considered. The main task of this thesis is to formulate the method for finding of „unloaded“ = „outstressed“ = „primary“ = **reduced** geometry, which is generally unavailable. Models of aneurysm's geometry, used so far, present already deformed configurations from blood pressure, axial prestretch and residual strain.

Key words: *hyperealasticity, arterial aneurysm, reduced geometry*

PODĚKOVÁNÍ

Moje poděkování náleží mému školiteli doc. Jiřímu Buršovi a jeho spolupracovníkovi dr. Pavlovi Skácelovi za ochotu, čas, cenné rady a připomínky. Bez jejich pomoci by tato práce nikdy nevznikla.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně pod odborným vedením doc. Jiřího Burši s využitím doporučené literatury.

OBSAH

<u>1 ÚVOD</u>	7
1.1 Popis problémové situace, formulace problému	7
<u>2 SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY</u>	8
<u>3 LÉKAŘSKÉ MINIMUM</u>	9
3.1 Histologie cévní stěny	9
3.2 Struktura cévního systému	9
3.3 Aneurysmata	10
<u>4 MINIMUM Z MECHANIKY KONTINUA</u>	13
4.1 Geometrická nelinearita	13
4.2 Materiálová nelinearita	14
4.3 Hyperelasticita a hyperelastické modely materiálu	15
4.4 Viskoelasticita	17
<u>5 MODEL VLASTNOSTÍ</u>	18
5.1 Vlastnosti a projevy cévní tkáně	18
5.2 Experimentální určování vlastností cévní tkáně	18
5.2.1 Faktory ovlivňující experimentální deformačně-napěťové charakteristiky	19
5.3 Volba vhodného konstitutivního modelu	20
5.3.1 Výsledky testovacích úloh s vybranými konstitutivními modely	21
5.4 Testovací úlohy s konstitutivním modelem Holzapfel	32
5.4.1 Výsledky testovacích úloh s konstitutivním modelem Holzapfel	32
<u>6 MODEL VAZEB A ZATÍŽENÍ</u>	34
<u>7 MODEL GEOMETRIE</u>	35
7.1 Návrh metody pro nalezení redukované geometrie	35
7.1.1 Testovací úloha navrhované metody	38
7.1.2 Vliv vstupních parametrů na přesnost navrhované metody	40
7.1.3 Redukovaná dvouvrstevná geometrie výdutě	46
7.2 Zhodnocení a budoucnost navrhované metody	49
<u>8 DEFORMAČNĚ-NAPĚŤOVÁ ANALÝZA VÝDUTĚ TEPNY</u>	50
8.1 Jednovrstevný, izotropní výpočtový model výdutě	50
8.2 Dvouvrstevný, anizotropní výpočtový model výdutě bez trombu	52
8.3 Dvouvrstevný, izotropní výpočtový model výdutě s trombem	54
8.4 Zhodnocení výsledků deformačně-napěťové analýzy výdutě tepny	56
<u>9 ZÁVĚR</u>	57
POUŽITÁ MÉDIA	58

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

AAA		... <i>aneurysma abdominální aorty</i>
CT		... <i>počítačový tomograf</i>
W_d	[J]	... <i>deviátorová složka měrné energie napjatosti</i>
C_{ij}	[-]	... <i>Cauchy-Greenův tenzor deformace</i>
F_{ij}	[-]	... <i>tenzor deformačního gradientu</i>
I_1, I_2, I_3	[-]	... <i>invarianty Cauchy-Greenova tenzoru deformace</i>
J	[-]	... <i>třetí invariant tenzoru deformačního gradientu</i>
I_{ij}	[-]	... <i>jednotkový tenzor</i>
X_i	[m]	... <i>označení souřadnice v počátečním nedeformovaném stavu</i>
X_i'	[m]	... <i>označení souřadnice v konečném deformovaném stavu</i>
x_i	[m]	... <i>označení „délky“ v počátečním nedeformovaném stavu</i>
x_i'	[m]	... <i>označení „délky“ v konečném deformovaném stavu</i>
λ_i	[-]	... <i>poměrná protažení</i>
δ_{ij}	[-]	... <i>Kroneckerovo delta</i>
τ_{ij}	[Pa]	... <i>Cauchyho tenzor napětí</i>
σ_{ij}	[Pa]	... <i>1. Piola-Kirchhoffův (Lagrangeův) tenzor napětí</i>
s_{ij}	[Pa]	... <i>2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí</i>
E_{ij}^L	[-]	... <i>Green-Lagrangeův tenzor přetvoření</i>
E_{ij}^A	[-]	... <i>Almansi-Hamelův tenzor přetvoření</i>
E_{ij}^C	[-]	... <i>Cauchyho tenzor přetvoření (logaritmický)</i>
ε_i	[-]	... <i>smluvní přetvoření</i>
u, v, w	[m]	... <i>deformační posuvy</i>
r_i	[m]	... <i>označení radiální souřadnice výchozího prvku</i>
r_i'	[m]	... <i>označení radiální souřadnice redukovaného prvku</i>

1 ÚVOD

Současný svět fascinuje a ohromuje nejen svými nekonečnými možnostmi a příležitostmi, které poskytuje, ale i svou vražednou rychlostí a tempem, kterému jsme permanentně vystaveni. Často se nám kladou enormní fyzické i psychické požadavky, jejichž splnění způsobuje značnou zátěž na náš organismus. Tento způsob života, tj. nedostatek odpočinku, spánku, nepravidelná a nezdravá životospráva, stres významně oslabují imunitní systém a přispívají k pomalému nezvratnému rozvoji srdečně-cévních onemocnění, kterým v západním světě nejvíce lidí podléhá.

Je tedy snahou pomocí úzké spolupráce různých oborů tuto situaci změnit. Z biomechanického hlediska jde o vývoj nových cévních protéz, stentů, srdečních čerpadel a chlopní. Základní úlohou ale stále zůstává deformačně-napěťová analýza, tj. do jaké míry jednotlivé patologické procesy ovlivňují celkovou napjatost a deformaci, jaké parametry nové protézy, stenty a čerpadla musí splňovat.

Tato diplomová práce se pomocí výpočtového modelování snaží o další pokrok v oblasti arteriálních výdutí (aneurysmat) – patologického zvětšení příčného průřezu cévy v důsledku degradačních procesů uvnitř stěny [3], kdy výrazně vzrůstá pravděpodobnost prasknutí (ruptury) [4].

Stávající práce soustředí svou pozornost na nalezení vhodného modelu vlastností, vytvoření modelu geometrie ze snímků získaných počítačovým tomografem (CT) a posouzení rizika ruptury nejčastěji srovnáním největšího hlavního napětí ve stěně výdutě a zdravé, nezasažené (intaktní) cévy [16].

Mezi nedostatky těchto prací patří dvakrát zatížený výpočtový model. Geometrie sestavená ze snímků získaných CT představuje již zatíženou konfiguraci od pulsujícího krevního tlaku a axiálního předpětí. Po vložení tohoto obrazu do některého konečnoprvkového systému ho předepsáním příslušných okrajových podmínek zatížíme již podruhé! Celkové výsledky tedy zaručují jistou bezpečnou hranici, ale jsou více vzdálené realitě. Motivací je tedy snaha o vytvoření metody, která snímkům stanoveným pomocí CT přiřadí takové redukované obrazy, které budou po zatížení v MKP s nimi korespondovat.

1.1 Popis problémové situace, formulace problému

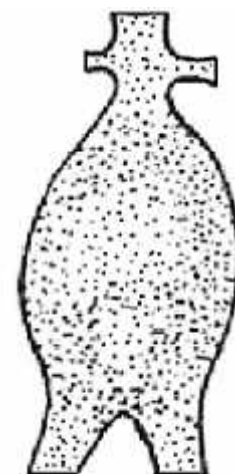
Nalezení redukované („nezatížené“) geometrie výdutě odlehčením výchozí konfigurace „negativním“ tlakem o velikosti odpovídající „průměrné“ hodnotě krevního tlaku se jeví jako nerealizovatelná varianta. Prostorová geometrie výdutě břišní aorty (AAA) vytvořená z CT snímků vykazuje v meridiánovém řezu (**Obr.1**) značnou geometrickou imperfekci, kdy energie napjatosti již na počátku kromě membránových složek obsahuje i ohybová napětí, tj. tlakovým zatížením této konfigurace dochází k jejímu zborcení. Zjednodušíme-li dokonce geometrii AAA jen na válcovou trubku, kterou odlehčíme „negativním“ tlakem o velikosti 13 kPa, následně z ní odstraníme napjatost (v ANSYS-u příkazem UPGEOM) a zpětně zatížíme tlakem o stejné velikosti, nezískáme výchozí konfiguraci. Obraz bude v případě izotropního modelu menší resp. větší u anizotropního modelu. Tyto skutečnosti (výsledky výpočtového modelování) znesnadňují nalezení „nezatížené“ geometrie výdutě.

Tato práce si klade za cíl nalézt metodu, která snímkům stanoveným pomocí CT při určité velikosti zatížení přiřadí takové redukované obrazy, který se jim po zatížení v MKP budou velmi blížit.

2 SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

Rozvojem výpočetní techniky a prolomením etických bariér ve společnosti došlo během posledních dvaceti let k obrovskému pokroku v popisu mechanického chování biologických měkkých materiálů.

Základem pro vysoký počet těchto prací se staly především studie chování technických pryží, prvně publikované v polovině minulého století, jejichž hlavní motivací byla potřeba vysvětlit a objasnit typické projevy elastomerů, s kterými se u jiných materiálů často nesetkáme. Tyto práce zpočátku vůbec nerespektovaly a nezohledňovaly vnitřní strukturu, která o výsledných mechanických vlastnostech zásadně rozhoduje, a omezovaly se jen na ryze fenomenologický popis chování (popis z makroskopického hlediska).



Obr.1 – Meridiánový řez AAA

V poslední době stále častěji vznikají nové konstitutivní modely, založené již na vnitřní struktuře, zohledňující i anizotropní či viskoelastické chování. První ucelený přehled těchto modelů nabízí práce [20]. Zde je i prvně popsán anizotropní hyperelastický model. Výsledky identifikace tohoto modelu s experimentálními deformačně-napětovými charakteristikami již i s uvažováním přechodových dějů nalezneme např. v [21,23]. Předepsání směrových vlastností pro válcovou trubku ukazuje práce [19]. Vzájemným srovnáním izotropního a anizotropního hyperelastického modelu se zabývá práce [30]. Odtud vyplývá, že výrazně odlišných výsledků dosáhneme při inflačním testu resp. ekvibiaxiálním tahu v rovinné deformaci. Experimentálně se s inflačním testem seznámíme např. v [13], kdy mezi pohyblivou a nepohyblivou čelist je při teplotě 36°C uchycen válcový vzorek aorty, do kterého čerpadlo vhání fyziologický roztok. Výsledky výpočtové simulace inflačního testu ukazuje např. práce [20], kdy pro hyperelastický model vlastností natahováním válcové trubky v podélném směru a tlakovém zatížení jejího vnitřního povrchu vzniká trojosý stav napjatosti a deformace, kdy všechna tři hlavní napětí dosahují maxima na vnitřním povrchu a směrem k vnějšmu povrchu jejich velikost klesá. Axiální napětí tedy není narušeno od lineárního konstitutivního modelu po tloušťku konstantní. O možnostech popisu pseudoelastického chování, kdy zatěžovací a odlehčovací trajektorie se vzájemně liší, pojednává práce [28]. Komplexním srovnáním vlastností biologických měkkých materiálů a technických elastomerů se zabývá prof. Holzapfel v [26].

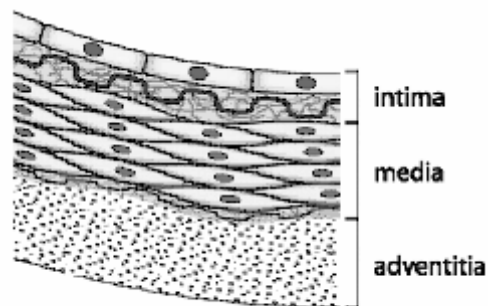
V oblasti aneurysmat se pozornost soustředí na možnosti hodnocení rizika ruptury. Stávající pozorovací metody, založené na velikosti výdutě, se totiž plně neosvědčují. V práci [16] byla proto navržena koncepce, která pravděpodobnost ruptury definuje jako funkci přírůstku největšího hlavního napětí ve výduti vzhledem k intaktní aortě. Nedostatek tohoto řešení spočívá v mezní hodnotě napětí, kterou neznáme. Za mezní hodnotu se tedy někdy volí mez pevnosti v tahu pro obvodový směr. Její hodnoty nalezneme např. v [33]. Za stejným účelem se i realizují „splitting, tearing, a peeling“ testy, popsané v [32]. Jakékoliv studie, které přiřazují výchozím zatíženým snímkům z CT „nezatížené“ redukované obrazy, jsem i přes enormní úsilí nevypátral!

3 LÉKAŘSKÉ MINIMUM

3.1 Histologie cévní stěny

Vnitřní stavba stěny cévy zcela zásadně určuje její výsledné mechanické vlastnosti. Z hlediska histologie sestává ze tří základních vrstev – intimy, medie a adventitie (**Obr.2**).

Tenkou vnitřní intimu tvoří vrstvička endotelových buněk a vaziva, okolo které jsou kruhově uspořádána elastická a kolagenní vlákna. Uplatňuje se při látkové výměně, plní zejména biochemické funkce. K celkovým mechanickým vlastnostem cévy přispívá zdravá intima nepatrně. V případech arteriosklerotického onemocnění hraje roli podstatnou, stává se tužší, klesá její pružnost [25].



Obr.2 – Histologie cévní stěny

Střední vrstva (tunica media) se skládá ze 40 až 60 elastických membrán, mezi kterými stoupají ve šroubovici se sklonem 30 až 50° fibrily hladkého svalstva obtočené vlákny kolagenními. Každou vrstvu tvoří podélně uložená vlákna elastická a do šroubovice namotaná vlákna kolagenní. U artérií svalového typu se na hranici s intimou nachází vnitřní elastická membrána, od adventitie médii odděluje vnější elastická membrána. Tunica media představuje mechanicky nejvýznamnější vrstvu, má zpočátku vyšší tuhost a pružnost než adventitia [25].

Základem zpočátku nejpoddajnější vnější adventitie jsou fibroblasty a fibrocyty produkující elastin a kolagen. Její mechanický význam nabývá s rostoucí deformací. Zcela chybí u mozkových tepen.

„Z chemického hlediska“ stěnu artérie převážně tvoří elastin, kolagen a hladká svalovina. Právě objemové podíly těchto komponent rozhodují o typu tepny, tj. jedná-li se o svalový nebo elastický typ. Svalové tepny obsahují velké množství hladké svaloviny, jsou malého průměru a vykazují viskoelastické chování. Do této kategorie spadají všechny periferní tepny. U elastického typu převažuje kolagen s elastinem. Mají větší lumen a jsou blíže k srdci [14].

3.2 Struktura cévního systému

Činností srdce se krev pohybuje uzavřeným arterio-venózním soustavou [1-2]. Z levé srdeční komory v kaniálním směru obloukovitě vystupuje hlavní a největší tepna v těle aorta, která prostřednictvím svých četných větví rozvádí krev do celého těla. Z jejího vzestupného oblouku odchází levá podklíčková artérie, levá krkavice a brachycefalický kmen, větvící se v pravou krkavici a pravou podklíčkovou artérii. Podklíčkové tepny zásobí krví horní končetiny, krkavicemi přes soustavu menších mozkových tepen spojujících se ve Willisově okruhu proudí krev do mozku.

Aorta postupně přechází ve svou sestupnou část, bránicí rozdělenou na hrudní (torakální) a břišní (abdominální) oddíl. Z obou úseků se odděluje celá řada menších větví, souhrnně označovaných termínem viscerální artérie. Na začátku břišní aorty odchází celiakální kmen, přecházející v jaterní (hepatickou), gastroduodenální (vyživuje žaludek s dvanáctníkem) a slezinnou (lienální) artérii. Pod

celiakálním kmenem postupně nalezneme horní střešní tepnu, vývody ledvinových (renálních) arterií a dolní střešní tepnu. Svou bifurkací se abdominální aorta rozděluje v pravou a levou kyčelní arterii, postupně přes stehenní tepnu přecházející v soustavu menších větví, souhrnně označované termínem infrainguinální tepénky, které zásobí krví dolní končetiny.

Všechna tepenná krev nakonec teče přes drobné kapiláry do žil, spojujících se postupně v horní resp. dolní dutou žílu, kterými se vrací do pravé srdeční síně.

3.3 Aneurysmata

Aneurysma [3] je lokální, ohraničené, minimálně 1,5 násobné rozšíření otvoru (lumenu) cévy. Dilataci tepny menší než 50% očekávaného průměru nazýváme ektázie, pro rozšíření nad 50% používáme termín arteriomegalie.

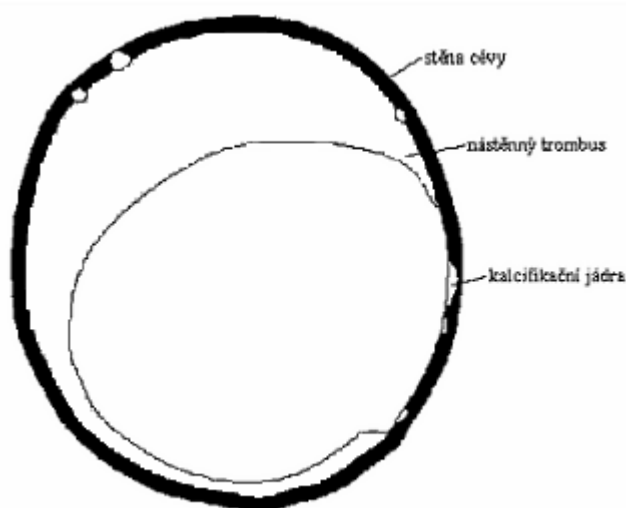
V důsledku vrozené malformace nebo patologických strukturních procesů probíhajících během života se stěna tepny oslabuje, ztrácí na tloušťce, a působením krevního tlaku se postupně začíná vydouvat. Vyklenují se všechny její vrstvy (pravá výduť) nebo jen některé (nepravá výduť) v excentricky tvarovou formu – váček nebo po celém obvodu cévy [3].

Aneurysma zpočátku nečiní postiženému žádné komplikace, chová se asymptomaticky. Ve výjimečných případech utlačuje některou z přilehlých struktur, omezuje její funkce a způsobuje bolest. Problém nastává ve chvíli, kdy stěna cévy v místě postižení praská. Vzniklou rupturou dochází k fatálnímu krvácení a rozvoji hemoragického šoku. V tomto případě ani rychlá adekvátní intervence nezaručuje přežití. Pouze včasná odhalení dávají postiženému větší šanci k přežití.

Aneurysmata bývají většinou zjištěna náhodně při vyšetření indikovaných z jiných příčin. Vhodnými diagnostickými prostředky jsou magnetická rezonance, CT vyšetření, kontrastní rentgen, ultrazvuk.

Malé výdutě (ektázie) lze léčit farmakologicky. Při rozsáhlejší dilataci zavádíme v případech aortálního postižení stentgrafty (endovaskulární léčba). Je-li výduť přítomna mimo aortu následuje resekce a otevřené konce se spojí umělou cévní protézou nebo implantátem [4].

Příčinou vzniku výdutí je z 70 až 90% dilatační forma arteriosklerózy [3]. Od klasické formy se liší, že nedochází k zúžení (stenóze) ale naopak. Nástěnný trombus (nepravidelná, vysoce poddajná masa převážně bílkovin a tuků, přilehlá k vnitřní straně intimy na přechodu mezi dilatovanou a nedilatovanou částí; vzniká v důsledku změn proudění krve) i kalcifikační



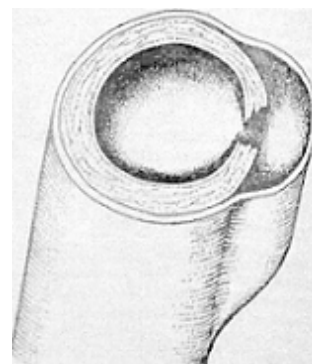
Obr.3 – Příčný průřez postižené cévy

jádra (lokální tvrdé, vysoce tuhé vápenné vměstky) zůstávají zpravidla přítomny (Obr.3). Mezi méně časté příčiny patří cystická medionekróza (10%) vyskytující se samostatně nebo v rámci Marfanova

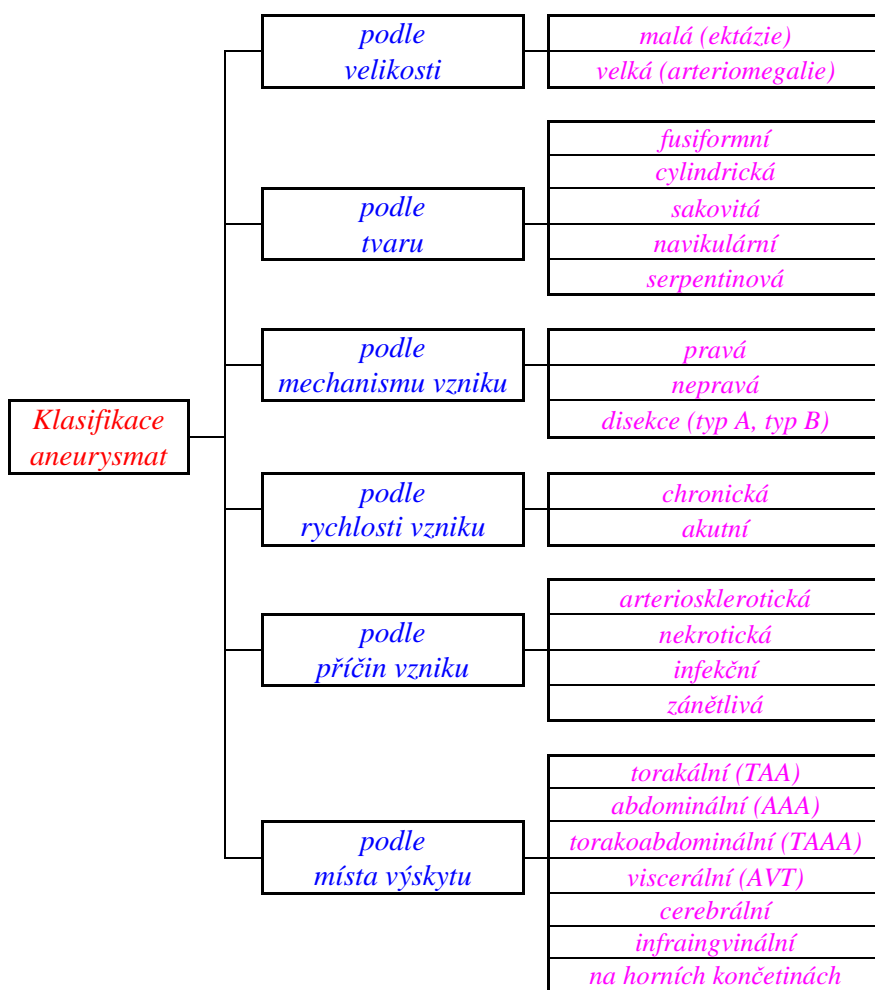
syndromu pro případ vrozené méněcennosti cévní stěny, různé infekce (syfilis, salmonela, streptokoky, stafylokoky) a záněty [3]. K spontánní ruptuře dochází zejména při bodných, střelných poraněních, dopravních nehodách, pádech z výšky.

Do oblastí aneurysmat spadá i akutní nebo chronická disekce (**Obr.4**). Jedná se o specifické onemocnění aorty, kdy v důsledku příčného natržení intimy a medie původně vnitřkem proudící krev proniká do stěny a spirálovitě ji trhá za vzniku drobného podélného kanálku, kterým následně protéká. Přirovnat to lze k vsunutí ruky pod podšívku rukávu při oblékání starého kabátu. Rozlišujeme disekci typu A pro vzestupnou aortu a disekci typu B pro hrudní aortu.

S výdutěmi se lze setkat na všech artériích. Pravděpodobnost výskytu roste s věkem člověka, častěji je nalézáme u mužů. Dle tvaru je členíme na člunkovitá (navikulární), válcová (cylindrická), vřetenovitá (fusiformní), vakovitá a hadovitá (serpentinová). Rozdělení dle jiných kritérií a stručné shrnutí uvádím v [Tab.1].



Obr. 4 - Disekce



[Tab. 1] – Klasifikace aneurysmat

I. Torakální (na hrudní aortě) aneurysma (TAA)

- všech tvarů mimo váčku; pravá nebo disekce typu B (20 až 40 %), většinou chronická, nejčastěji arteriosklerotického původu, v případě disekce hraje hlavní roli cystická medionekróza nebo infekce
- pravděpodobnost ruptury u výdutí velikostí 6 - 6,9 cm je 4x vyšší než u velikostí 4 - 4,9 cm
- rovnoměrný výskyt z hlediska pohlaví [4]
- po stanovení diagnózy bez adekvátní léčby přežívá během následujícího roku jen 20%
- pooperační úmrtnost kolem 10%, během následujících 5 let umírá 40% pacientů [4]

II. Viscerální aneurysmata (AVT)

- pravá, všech tvarů mimo váčku, arteriosklerotického původu, chronická i akutní
- poměrně vzácná, nejčastěji postižena slezinná (50%), renální (22%), jaterní (15%) a horní střevní tepna (8%) [4]

III. Mozková aneurysmata

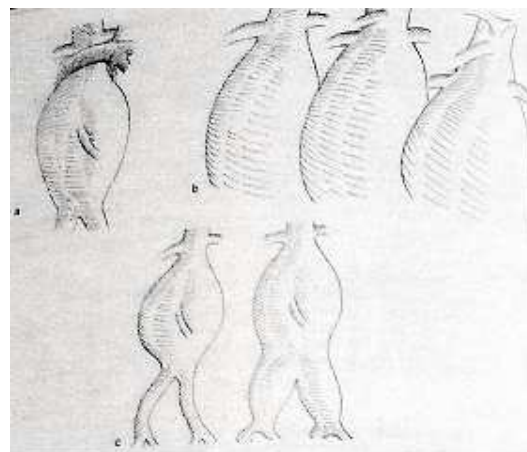
- vakovitá, arteriosklerotického původu, chronická
- vysoká úmrtnost, nalezneme je na vertebrální arterii nebo tepnách Willisova okruhu

IV. Aneurysmata na horních a dolních končetinách

- akutní, nepravé výdutě, málo četná
- zpravidla neohrožují život, komplikace nastávají v případě následné embolizace

V. Abdominální (na břišní aortě) aneurysma (AAA)

- nejrozšířenější pravá výduť vůbec, všech tvarů mimo váčku, chronická, arteriosklerotického původu, ze 70% zcela asymptomatické, ve 40% se prvně projeví rupturou, četnější u mužů [4]
- pravděpodobnost ruptury roste s velikostí, 0,5% pro velikost <5 cm, 5% pro velikost ≥5 cm, 12,5% pro velikost nad 7,5 cm [4]
- (Obr.5) v 95% začínají pod odstupem ledvinných tepen (infrarenální), se suprarenálními (nad odstupem) a juxtarenálními (ve výši odstupu) případy se setkáváme řidčeji [4]
- distálně končí zpravidla nad aortální bifurkací, aortoiliakální (zasažena i kyčelní tepna) výduť se objevuje v menší míře



Obr. 5 – Typy AAA

4 MINIMUM Z MECHANIKY KONTINUA

Základní úlohou mechaniky kontinua je pro těleso se známou geometrií, materiálem, vazbami s okolím a definovaným zatížením stanovit jeho napjatost a deformaci - přímý problém. V libovolném bodě a jeho blízkém okolí tedy vyšetřujeme rozložení napětí sestavením rovnic rovnováhy na uvolněném prvku, a celkovou změnu jeho geometrické konfigurace z hlediska tvaru a objemu [5]. Oddělení tvarové (deviátorové) a objemové (kulové) složky deformace přináší podstatné informace o chování tělesa a často představuje jediný prostředek pro správnou formulaci nejjednoduššího konstitutivního modelu užívaného v mechanice kontinua, který matematicky popisuje experimentálně nebo empiricky získanou deformačně-napěťovou závislost [9].

4.1 Geometrická nelinearita

Při přetvořeních větších než 1% existuje mezi počáteční nedeformovanou a koncovou deformovanou konfigurací značný rozdíl. Pro přesné určení zobrazení mezi oběma stavy potřebujeme znát celé vektorové pole posuvů u , v , w . V opačném případě se lze dopustit významné chyby.

K popisu velkých konečných deformací se využívají dva rozdílné přístupy, lišící se základní vztažnou soustavou. Lagrangeova koncepce volí za nezávisle proměnnou nedeformovanou geometrii. Tento přístup nalézá uplatnění v mechanice těles. Eulerova uvažuje za nezávisle proměnnou geometrii deformovanou. S tímto přístupem se častěji setkáme v mechanice tekutin [8]. Transformaci mezi aktuální a výchozí geometrickou konfigurací vyjadřuje tenzor deformačního gradientu F_{ij} .

Tenzor deformačního gradientu F_{ij}

$$F_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X'_1}{\partial X_1} & \frac{\partial X'_1}{\partial X_2} & \frac{\partial X'_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial X'_2}{\partial X_1} & \frac{\partial X'_2}{\partial X_2} & \frac{\partial X'_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial X'_3}{\partial X_1} & \frac{\partial X'_3}{\partial X_2} & \frac{\partial X'_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

Pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace C_{ij}

$$C_{ij} = F_{ij}^T \cdot F_{ij} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial X'_1}{\partial X_1}\right)^2 & \left(\frac{\partial X'_1}{\partial X_2}\right)^2 & \left(\frac{\partial X'_1}{\partial X_3}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial X'_2}{\partial X_1}\right)^2 & \left(\frac{\partial X'_2}{\partial X_2}\right)^2 & \left(\frac{\partial X'_2}{\partial X_3}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial X'_3}{\partial X_1}\right)^2 & \left(\frac{\partial X'_3}{\partial X_2}\right)^2 & \left(\frac{\partial X'_3}{\partial X_3}\right)^2 \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

Tenzoru deformačního gradientu chybí důležitá vlastnost – objektivnost, tj. obsahuje současně informace o deformaci i posuvech tělesa jako tuhého celku.

Polární dekompozicí rozdělíme tenzor deformačního gradientu na nediagonální matici rotace elementárního prvku a na diagonální matici poměrných hlavních protažení λ_{ij} [8], která hrají podstatnou roli v přepočtu mezi skutečnou a smluvní hodnotou napětí.

$$\lambda_{ii} = \frac{\partial X'_i}{\partial X_i} = 1 + \varepsilon_{ii} \quad (4.2)$$

Třetí invariant J tenzoru deformačního gradientu charakterizuje kulovou složku deformace u hyperelastických modelů materiálů. Pro $J = I$ se materiál jeví objemově nestlačitelným. Pro popis

tvárové složky měrné energie napjatosti hyperelastických modelů materiálů užíváme první a druhý modifikovaný invariant nejčastěji pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace [8].

$$\bar{I}_1 = I_1 \cdot J^{-1/3} \quad \bar{I}_2 = I_2 \cdot J^{-2/3} \quad (4.3)$$

TENZORY NAPĚTÍ:

Cauchyho tenzor napětí – vztahuje elementární sílu ke skutečné ploše elementárního hranolu v aktuální deformované konfiguraci [8]

$$\tau_{ij} = \frac{dF_i}{dS_j} \quad (4.4)$$

1.Piola-Kirchhoffův (Lagrangeův) tenzor napětí – vztahuje elementární sílu k ploše elementárního hranolu v počáteční nedeformované konfiguraci [8]

$$\sigma_{ij} = \frac{dF_i}{dS_j} = \frac{\tau_{ij}}{F_{kl}} \delta_{kl} \quad (4.5)$$

2.Piola-Kirchhoffův tenzor napětí [8]

$$s_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{F_{kl}} \delta_{kl} = \frac{\tau_{ij}}{C_{kl}} \delta_{kl} \quad (4.6)$$

TENZORY PŘETVOŘENÍ:

Green-Lagrangeův tenzor přetvoření [8]

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right] = \frac{1}{2} [C_{ij} - I_{ij}] \quad (4.7)$$

Almansi-Hamelův tenzor přetvoření [8]

$$E_{ij}^A = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} - \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right] = \frac{1}{2} \left[I_{ij} - \frac{I_{ij}}{C_{kl}} \delta_{kl} \right] \quad (4.8)$$

Cauchyho tenzor přetvoření [8]

$$E_{ij}^C = \ln \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) = \ln \lambda_{ij} \quad (4.9)$$

Vzájemně energeticky konjugovanými tenzory pro energii napjatosti jsou Green-Lagrangeův tenzor přetvoření a 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí, resp. Almansi-Hamelův tenzor přetvoření a Cauchyho tenzor napětí.

4.2 Materiálová nelinearita

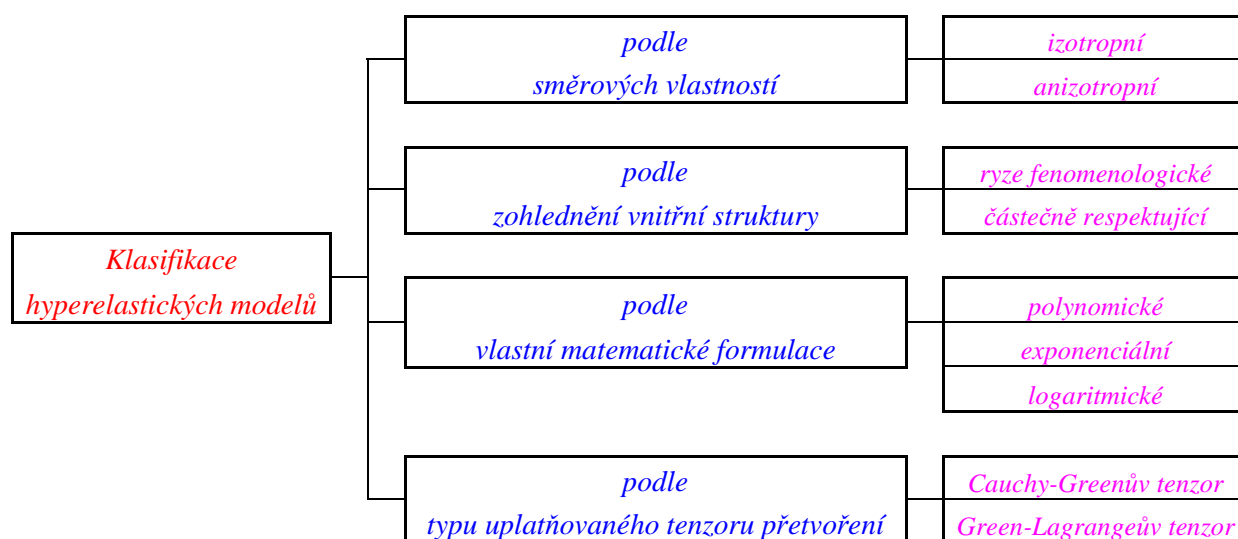
Materiálovou nelinearitu chápeme jako nelineární závislost mezi tenzorem napětí a přetvoření, kdy tuhost není konstantní, elastické parametry závisí na deformaci $D_{ij} = f(\varepsilon_{ij})$. Nárůst deformace tedy od určité hodnoty vzhledem k napětí zpomaluje (zpevňující průběh $\sigma - \varepsilon$) nebo zrychluje (změkčující průběh). U pryží nastává kombinace progresu s regresí v rámci jedné deformačně-napěťové charakteristiky (S-křivka). Mimo pryží se s materiálovou nelinearitou setkáme i u biologických měkkých materiálů. O vzniku materiálové nelinearity rozhoduje vnitřní struktura.

4.3 Hyperelasticita a hyperelastické modely materiálu

Schopnost určitých materiálů dosáhnout velkých konečných deformací označujeme jako hyperelasticita. Biologické měkké materiály a technické elastomery při zatížení mění svůj tvar bez porušení vnitřní struktury v řádu desítek procent (u některých pryží až 700%) a při zpětném odlehčení se vrací téměř do původního stavu, přičemž celý proces probíhá zásadně po nelineární trajektorii.

Matematicky experimentální deformačně-napětovou charakteristiku technických elastomerů a biologických měkkých materiálů nejčastěji popisujeme pomocí hyperelastického konstitutivního modelu, založeného na skalární potenciální funkci – měrné energii napjatosti, jejíž derivací podle některé složky tenzoru přetvoření získáme odpovídající složku energeticky sdruženého tenzoru napětí [8]. Parametry funkční závislosti σ - ε následně stanovíme metodou nejmenších čtverců, absolutních nebo relativních hodnot. Bližší fyzikální význam tyto parametry zpravidla postrádají, většinou z nich lze určit pouze počáteční směrnici deformačně-napětové závislosti (počáteční tuhost).

V současnosti hyperelastický konstitutivní model představuje základní a nejrozšířenější prostředek pro popis experimentální deformačně-napětové závislosti technických elastomerů a biologických měkkých materiálů. Počet těchto modelů se pohybuje v řádu desítek a stále se zvyšuje. Rozdělit je lze podle řady kritérií [Tab.2].



[Tab. 2] – Klasifikace hyperelastických modelů

Mezi nejběžnější a nepoužívanější hyperelastické konstitutivní modely patří:

I. Polynomy resp. Mooney-Rivlin [10]

- jednoduché, ryze fenomenologické, izotropní konstitutivní modely, vzájemně se lišící v kulové složce měrné energie napjatosti, tvarovou složku charakterizuje první a druhý modifikovaný invariant Cauchy-Greenova tenzoru deformace

-deviátorová složka měrné energie napjatosti je vyjádřena polynomem 1. až 6. stupně, kde c_{ij} jsou materiálové parametry o rozměru napětí

$$W_d = \sum_{i+j=1}^{N=6} c_{ij} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^i \cdot (\bar{I}_2 - 3)^j \quad (4.10)$$

II. Redukované polynomy

- skupina jednoduchých, ryze fenomenologických, izotropních konstitutivních modely, odvozených ze základního polynomu vynecháním některých jeho členů

Yeoh [10]

- deviátorová složka měrné energie napjatosti zahrnuje jen členy s prvním modifikovaných invariantem polynomu 1. až 6. stupně, kde c_{i0} jsou materiálové parametry o rozměru napětí

$$W_d = \sum_{i=1}^{N=6} c_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i \quad (4.11)$$

III. Ogden [10]

- izotropní model, částečně respektuje vnitřní strukturu, pracuje s hlavními protaženími
- užíván až do šesté mocniny, kde μ_i o rozměru napětí a bezrozměrná α_i jsou materiálové parametry
- široké užití v oblasti technických elastomerů až do přetvoření 700%

$$W_d = \sum_{i=1}^{N=6} \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3)^i \quad (4.12)$$

IV. Arruda-Boyce [10]

- osmiřetězcový izotropní model, vytvořený rozvojem do nekonečné řady na základě celkové energetické bilance elementární buňky technického elastomeru
- částečně respektuje vnitřní strukturu, pracuje s limitními protaženími strukturních řetězců
- μ o rozměru napětí a bezrozměrná λ_L jsou materiálové parametry

$$W_d = \mu \left[\frac{1}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{20\lambda_L^2} (\bar{I}_1 - 3)^2 + \frac{11}{1050\lambda_L^4} (\bar{I}_1 - 3)^3 + \frac{19}{7000\lambda_L^6} (\bar{I}_1 - 3)^4 + \frac{519}{673750\lambda_L^8} (\bar{I}_1 - 3)^5 \right] \quad (4.13)$$

V. Van der Waals (Kilian) [11]

- jednoduchý, izotropní model, analogicky interpretuje energetickou rovnováhu u elastomerů jako v případě reálného plynu, částečně respektuje vnitřní strukturu, pracuje s blokovacími protaženími
- μ o rozměru napětí a bezrozměrná β , a , λ_m jsou materiálové parametry

$$W_d = \mu \left\{ -(\lambda_m^2 - 3) \left[\ln \left(1 - \sqrt{\frac{((1-\beta)\bar{I}_1 + \beta\bar{I}_2) - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \right) + \frac{((1-\beta)\bar{I}_1 + \beta\bar{I}_2) - 3}{\lambda_m^2 - 3} \right] - \frac{2}{3} a \left(\frac{((1-\beta)\bar{I}_1 + \beta\bar{I}_2) - 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (4.14)$$

VI. Delfino [17, 20]

- izotropní dvouparametrický model, na základě exponenciální formulace velice přesně zohledňuje a aproximuje zpevnění experimentálních deformačně-napěťových křivek
- v deviátorové složce měrné energie napjatosti vystupuje jen první modifikovaný invariant pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace, a o rozměru napětí a bezrozměrné b jsou materiálové parametry

$$W_d = \frac{a}{b} \left\{ \exp \left[\frac{b}{2} (\bar{I}_1 - 3) \right] - 1 \right\} \quad (4.15)$$

VII. Holzapfel [17, 20]

- anizotropní, exponenciální, v současnosti jeden z nejdokonalejších konstitutivních modelů
- respektuje vnitřní strukturu současným uvažováním až dvou osnov výztuže, kdy odezva „matrice“ (izotropní složka) a „nosné části“ (anizotropní) jsou vzájemně odděleny
- izotropní složka měrné energie napjatosti je funkcí prvního a druhého modifikovaného invariantu Cauchy-Greenova tenzoru deformace, v anizotropní části vystupuje čtvrtý a šestý invariant, které fyzikálně představují kvadrát protažení nosné části
- velikost čtvrtého (**šestého**) invariantu získáme účením (tenzorová operace analogická ke skalárnímu součinu vektorů) Cauchy-Greenova tenzoru deformace a směrového tenzoru první (**druhé**) osnovy výztuže
- směrový tenzor první (**druhé**) osnovy je dán dyadickým součinem dvou identických jednotkových vektorů první (**druhé**) osnovy, jejichž složky odpovídají směrovým kosinům mezi vektorem a osami globálního souřadného systému
- c_{ij} , k_1 o rozměru napětí a bezrozměrné k_2 jsou materiálové parametry

$$W_d = \sum_{i+j=1}^{N=3} c_{ij} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^i \cdot (\bar{I}_2 - 3)^j + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \left\{ \exp \left[k_2 (I_i - 1)^2 \right] - 1 \right\} \quad (4.16)$$

4.4 Viskoelasticita

U viskoelastických materiálů se napětí a přetvoření stává funkcí času, kdy po aplikaci zatížení rovnovážný stav nenastane okamžitě, ale až po odeznění přechodových dějů. Doba trvání těchto dějů je značně individuální a pohybuje se od zlomků sekund po hodiny. Čím kratší je z pohledu vnějšího pozorovatele doba probíhajících přechodových dějů vůči času sledovaného zatěžovacího procesu, tím více se materiál z jeho pohledu chová elasticky.

Mezi typické projevy viskoelasticity řadíme časově závislou odezvu napětí při skokové změně deformace (relaxace), závislost přetvoření na čase při silovém zatěžování (creep), hystereze a fázový posuv mezi deformačně-napěťovými křivkami v důsledku cyklického zatěžování, kdy dochází k částečné přeměně dodávané mechanické energie na vnitřní [8].

5 MODEL VLASTNOSTÍ

5.1 Vlastnosti a projevy cévní tkáně

Každá vrstva cévy vykazuje odlišné materiálové vlastnosti z důvodu různého množství elastinu, kolagenu a hladké svaloviny, které společně vytváří nosnou složku každé vrstvy [12]. Zvládnutá, vysoce tuhá kolagenní vlákna se zpočátku vůbec nezapojují do přenosu zatížení, stěna cévy je značně poddajná a pružná, mezi napětím a deformací platí téměř lineární závislost. V okamžiku dosažení určité hodnoty deformace se kolagenní vlákna začnou napřimovat a přenášet zatížení. Zpomalí se růst deformace vzhledem k napětí. Na deformačně-napětíové charakteristice vzniká postupná progrese. V další fázi je zatíženo přenášeno téměř výhradně kolagenními vlákny, přetvoření se vzhledem k stále rostoucímu napětí podstatně nemění, nastává strmý růst tuhosti. Velikost objemového podílu hladké svaloviny navíc výrazně přispívá k časové závislosti napětí a deformace. S viskoelastickým chováním se typicky setkáme na periferních tepnách (svalový typ), kde doba trvání přechodových dějů ale zpravidla nepřekračuje několik sekund. U tepen elastického typu proměnnost napětí a deformace v čase v současnosti nejsme schopni experimentálně určit a pro matematický popis jejich deformačně-napětíových charakteristik primárně užíváme hyperelastický konstitutivní model.

5.2 Experimentální určování vlastností cévní tkáně

Vlastnosti cévní tkáně určujeme z chování při základních deformačně-napětíových stavech, kdy z průběhů deformačně-napětíových charakteristik získáváme informace o tuhosti, pružnosti, tažnosti, pevnosti použitého vzorku. Chování při základních deformačně-napětíových standardně slouží i jako srovnávací kritérium v procesu ztotožňování konstitutivního modelu se skutečnou cévní tkání. Na vzorku cévní tkáně, ponořeného do fyziologického roztoku při teplotě kolem 36°C, realizujeme základní mechanické zkoušky, kdy samotný proces vyhodnocování provádíme až v okamžiku blízké shody zatěžovací a odlehčovací trajektorie [17]. Každou zkoušku uskutečňujeme opakovaně za účelem získání souboru výsledků, ze kterých následně sestrojíme jedinou, zprůměrovanou deformačně-napětíovou charakteristiku. Její relativní odchylka se zpravidla pohybuje do 20%. Mezi základní realizované mechanické zkoušky patří:

Jednoosý tah: - „čtvercový“ vzorek arteriální tkáně uniaxiálně zatěžíme tak, že ve zbývajících dvou směrech volně nastává příčná kontrakce - vzniká jednoosý stav napjatosti a trojosý stav deformace

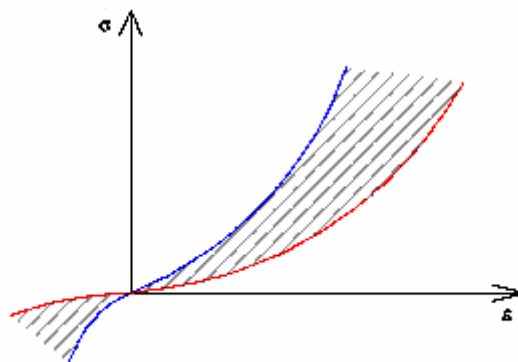
Biaxiální tah: - „čtvercový“ vzorek arteriální tkáně zatěžíme rovnoměrně (ekvibiaxiální tah) nebo nerovnoměrně ve dvou navzájem kolmých směrech, přičemž příčné kontrakci v třetím směru není zabráněno - vzniká dvouosý stav napjatosti a trojosý stav deformace

Inflační test: - jiná forma biaxiálního testu, kdy do válcového vzorku artérie, uchycené mezi pohyblivou a nepohyblivou čelist, čerpadlem vhnáme fyziologický roztok tak, že hydrostatický tlak v trubici se blíží skutečné velikosti krevního tlaku - vzniká trojosý stav napjatosti a deformace

Rovinný tah: - „čtvercový vzorek“ arteriální tkáně uniaxiálně zatěžíme tak, že v jednom příčném směru je kontrakce volná a ve druhém směru je jejímu vzniku zabráněno - vzniká dvouosý stav napjatosti a deformace (tato zkouška se často ztotožňuje s čistým smykem)

Nejnázornější srovnání výsledků jednotlivých mechanických zkoušek poskytuje zobrazení do souřadnic maximální napětí a přetvoření (**Obr.6**).

V této rovině leží průmět deformačně-napět'ové charakteristiky ekvibiaxiálního tahu (modrá křivka na **Obr.6**) vždy nad průmětem deformačně-napět'ové charakteristiky jednoosého tahu (červená křivka na **Obr.6**) a zároveň obě křivky jednoznačně definují oblast, do které spadají výsledky zbývajících mechanických zkoušek. Při stejné hodnotě přetvoření se maximální rozdíl mezi oběma hraničními křivkami pohybuje mezi 100 až 150%.



Obr. 6 – Srovnání deformačně-napět'ových charakteristik jednotlivých mechanických zkoušek v souřadnicích maximální napětí a přetvoření

Při výpočtové simulaci jednotlivých mechanických zkoušek musí výsledky z hlediska deformace a napjatosti kvalitativně souhlasit s experimentem.

5.2.1 Faktory ovlivňující experimentální deformačně-napět'ové charakteristiky

Průběh deformačně-napět'ových charakteristik zcela zásadně závisí na objektu, jeho věku, pohlaví, zdravotním stavu i samotném místě, ze kterého odběr provádíme.

Podle typu použitého vzorku arteriální tkáně se odvíjí rozdílná počáteční tuhost (od jednotek kPa po jednotky MPa), maximální tažnost (20 až 80%), maximální pevnost (od desítek kPa po jednotky MPa), vzájemný poměr tuhostí mezi vnější a vnitřní vrstvou (dvojnásobek až desetinásobek), míra progresu (od téměř žádné až po výrazné exponenciální zpevnění blíží se plastickotuhému modelu).

Z hlediska věku platí, že od narození člověka se oblast zpevnění posunuje k vyšším hodnotám deformace, roste i pružnost. Po dosažení určitého věku se deformačně-napět'ová charakteristika přesouvá zpět doleva a zvyšuje se i celková tuhost (u mužů rychleji než u žen) [13].

Průběh deformačně-napět'ových charakteristik významně ovlivňuje i teplota, při které mechanické zkoušky provádíme. Při pokojové teplotě (20°C) získáme kvalitativně i kvantitativně odlišný průběh než v případě 36°C. Jeden stupeň Celsia způsobuje celkový rozdíl v jednotkách procent.

Při cyklickém zatížení pozorujeme posun mezi deformačně-napět'ovými charakteristik směrem doprava. S rostoucím počtem cyklů ale tento trend ztrácí na významu a nastává stabilizace křivky [17]. Jednoosé zatížení v obvodovém směru vede k odlišnému průběhu deformačně-napět'ové charakteristiky než v případě podélného směru [18]. Při stejné hodnotě přetvoření dosahuje rozdíl v napětích až 30%.

Hormonální a nervová aktivita (okamžitý psychický a fyzický stav objektu) vyvolávají krátkodobou změnu deformačně-napět'ových charakteristik. Tento vliv žádným způsobem nezohledňujeme.

5.3 Volba vhodného konstitutivního modelu

K řešení přímých i nepřímých problémů mechaniky kontinua vždy vyžadujeme konstitutivní model, tj. matematické vyjádření experimentálně nebo empiricky získané přírodní zákonitosti mezi příčinou a následkem, související s vlastní materiálovou podstatou objektu [9]. V užším smyslu k experimentální předloze sestrojujeme deformačně-napětíovou funkci.

V této práci základní experimentální předloha pochází ze vzorku hrudní aorty prasete domácího. Jedná se o deformačně-napětíové charakteristiky jednoosého a ekvibiaxiálního tahu pro obvodový a podélný směr s maximálním naměřeným přetvořením $\varepsilon_{max} = 0,4$. Proměnnost napětí a deformace v čase nebyla měřena [18]. Tato skutečnost nám umožňuje vybírat konstitutivní model pouze z nabídky hyperelastických.

Z deformačně-napětíových charakteristik jednoosého (poté i ekvibiaxiálního) tahu v obvodovém a podélném směru byla nejprve sestrojena jediná zprůměrovaná „izotropní“ závislost $\sigma - \varepsilon$. Obě získané křivky byl následně matematicky popsány řadou hyperelastických izotropních modelů [10-11]. Jejich použitelnost byla následně posuzována na základě výsledků výpočtové simulace základních mechanických zkoušek, které standardně slouží jako testovací úlohy při výběru vhodného konstitutivního modelu:

Jednoosý tah (tlak): - rovinný, kvadratický, osmiuzlový prvek se dvěma osami symetrie zatěžují deformačně v jednom směru za vzniku homogenní jednoosé napjatosti, která z hlediska velikosti odpovídá skutečnému (Cauchymu) napětí

Biaxiální tah (tlak): - rovinný, kvadratický, osmiuzlový prvek se dvěma osami symetrie zatěžují deformačně ve dvou navzájem kolmých směrech za vzniku dvouosé napjatosti, která z hlediska velikosti odpovídá skutečnému (Cauchymu) napětí

- realizují případ rovnoměrného zatěžování, kdy oba zadávané posuvy si velikostně odpovídají (ekvibiaxiální zatěžování), i případ nerovnoměrného zatěžování, kdy mezi oběma zadávanými posuvy z hlediska velikosti platí určitý vzájemný poměr (tzv. proporcionální zatěžování)

Rovinný tah (tlak): - rovinný, kvadratický, osmiuzlový prvek v rovinné deformaci zatěžují deformačně v jednom směru za vzniku dvouosé napjatosti, která z hlediska velikosti odpovídá skutečnému (Cauchymu) napětí

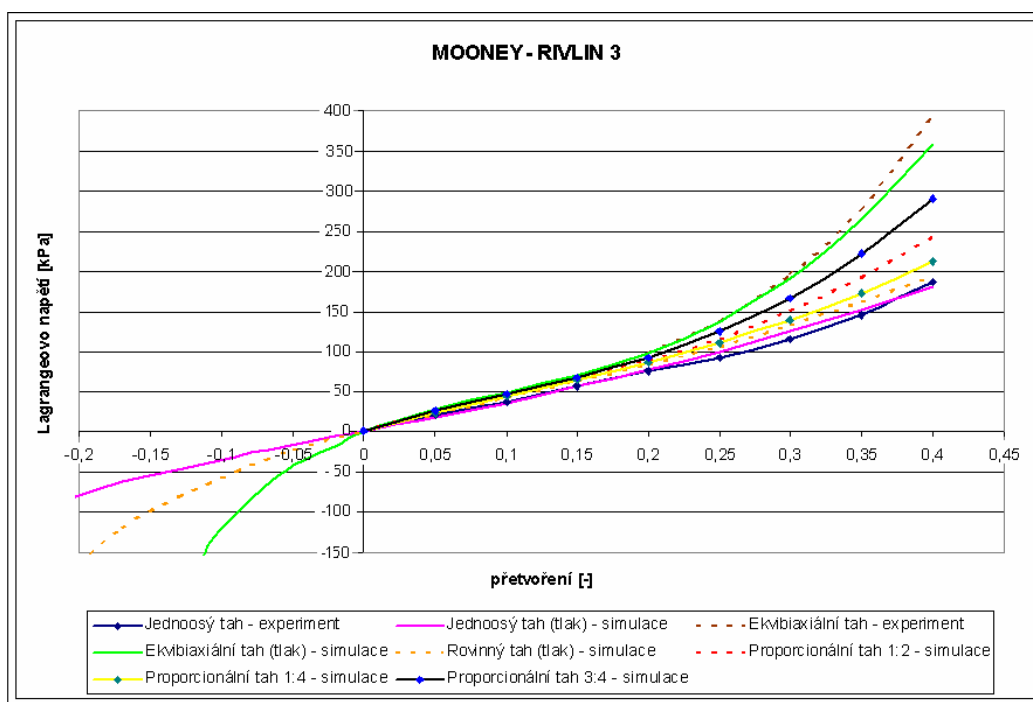
Inflační test: - v axisymetrii válcovou trubku o vnitřním průměru 10 mm a tloušťce 1,5 mm¹ současně zatěžují vnitřním tlakem o velikosti 10 až 20 kPa a axiálním posuvem, který způsobuje až 30% podélné protažení - vzniká trojosý stav napjatosti, kdy radiální i obvodové napětí dosahují vždy maxima na vnitřním povrchu (poměr mezi obvodovým napětím na vnitřním a vnějším povrchu je větší než jedna), axiální napětí v některých případech nabývá maxima na povrchu vnějším (poměr mezi axiálním napětím na vnitřním a vnějším povrchu je menší než jedna) → rozpor s prací [20], kde obvodové i axiální napětí jsou největší na vnitřním povrchu

¹ Rozměry trubky kvalitativně neovlivňují rozložení napětí po tloušťce. Pro jiný vnitřní průměr než 10 mm nebo jinou tloušťku než 1,5 mm získám u libovolného konstitutivního modelu při stejných okrajových podmínkách kvalitativně stejný průběh všech napětí po tloušťce stěny.

5.3.1 Výsledky testovacích úloh s vybranými konstitutivními modely

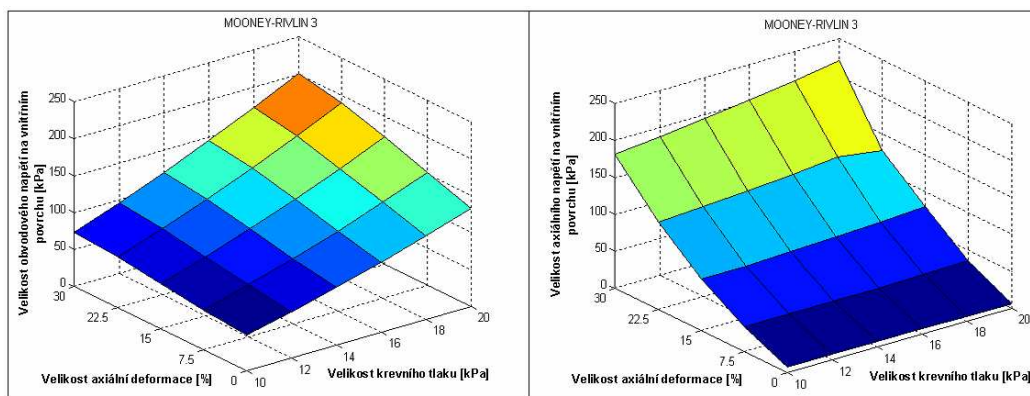
I. Mooney-Rivlin 3-parametrický

- při jednoosém tahu je zpočátku konstitutivní model poddajnější než experimentální vzorek, od 15% deformace se situace obrací a výpočtová křivka jednoosého tahu leží nad experimentální, maximální rozdíl mezi oběma křivkami nepřesahuje 10% (**Obr.7a**)
- při ekvibiaxiálním tahu je napětí ze simulace vyšší až do $\varepsilon = 0,2$, zpevnění u výpočtové křivky ale nastává později než v případě experimentální, maximální rozdíl mezi oběma křivkami dosahuje 10%
- chování modelu při proporcionálním i rovinném tahu a při tlakových zatíženích odpovídá předpokladům (**Obr.7a**)

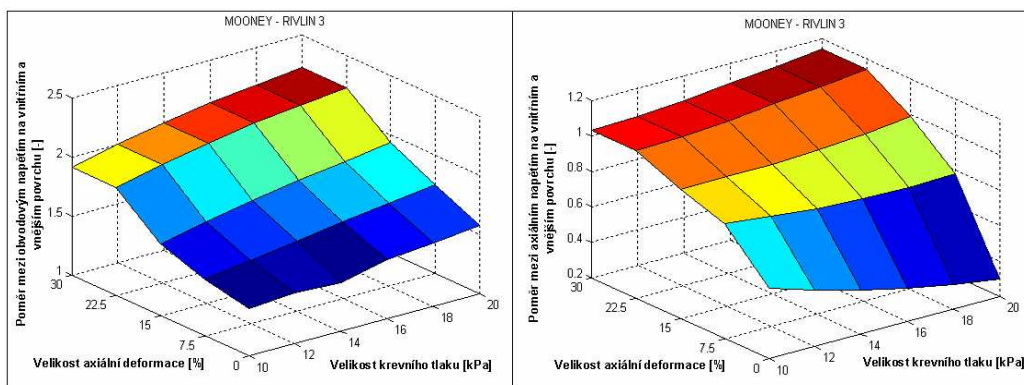


Obr. 7a – Výsledky základních mechanických testů

- při inflačním testu velikost obvodového a axiálního napětí roste s velikostí krevního tlaku i axiální deformace (**Obr.7b**), na vnitřním povrchu dosahuje maxima obvodové napětí (**Obr.7c**), axiální napětí je ale na vnitřním povrchu nižší než na vnějším – poměr mezi axiálním napětím na vnitřním a vnějším povrchu je menší než jedna (**Obr.7c**)



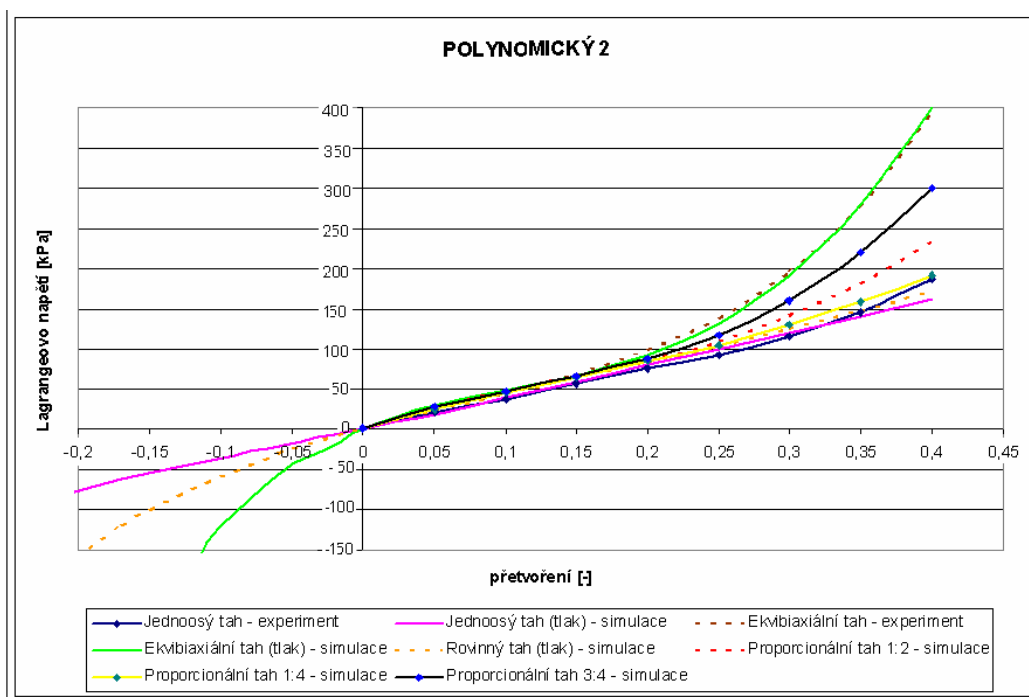
Obr. 7b – Výsledky inflačního testu



Obr. 7c – Výsledky inflačního testu

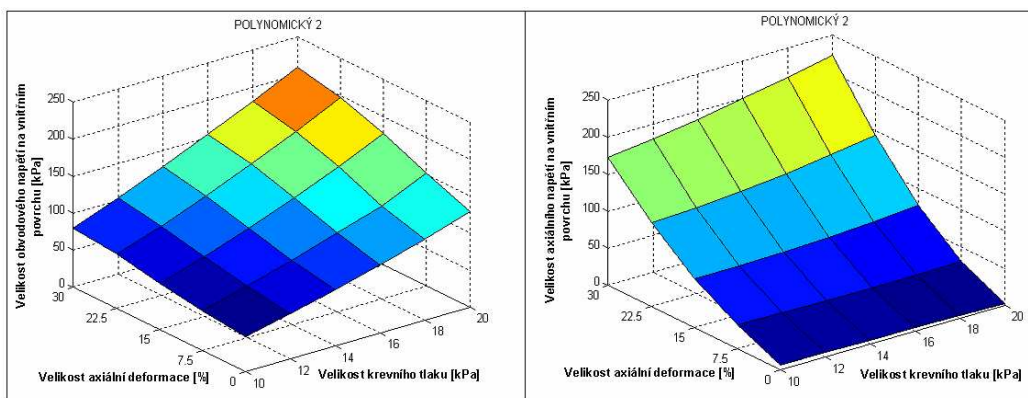
II. Polynom 2. stupně

- při jednoosém tahu je konstitutivní model do 30% deformace tužší než experimentální vzorek, v důsledku pomalejší progresy výpočtové křivky jednoosého tahu se postupně ocitáme pod experimentální, maximální rozdíl mezi oběma křivkami se pohybuje do 10% (Obr.8a)
- při ekvibiaxiálním tahu se chování konstitutivního modelu dobře shoduje s experimentálním vzorkem, rozdíl mezi oběma křivkami je do 5% (Obr.8a)
- chování modelu při proporcionálním i rovinném tahu a při tlakových zatíženích odpovídá předpokladům (Obr.8a)

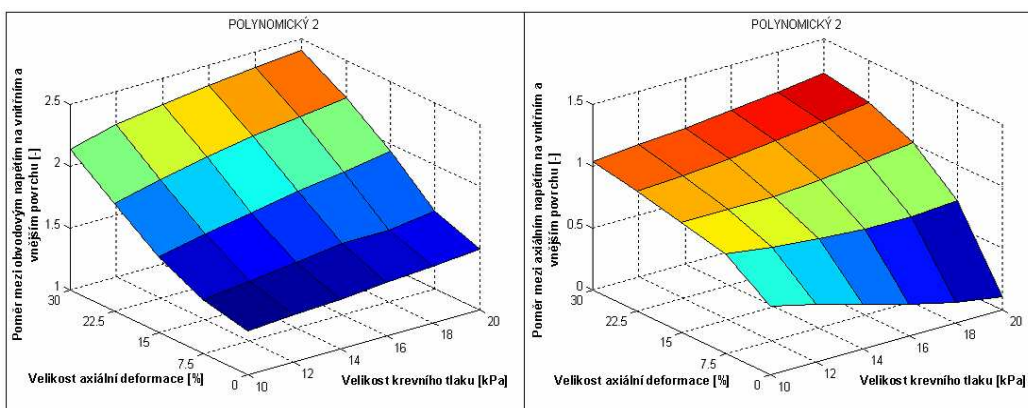


Obr. 8a – Výsledky základních mechanických testů

- při inflačním testu velikost obvodového a axiálního napětí roste s velikostí krevního tlaku i axiální deformace (Obr.8b), na vnitřním povrchu je obvodové napětí nejvyšší (Obr.8c), axiální napětí ale dosahuje svého maxima na vnějším povrchu – poměr mezi axiálním napětím na vnitřním a vnějším povrchu je menší než jedna (Obr.8c)



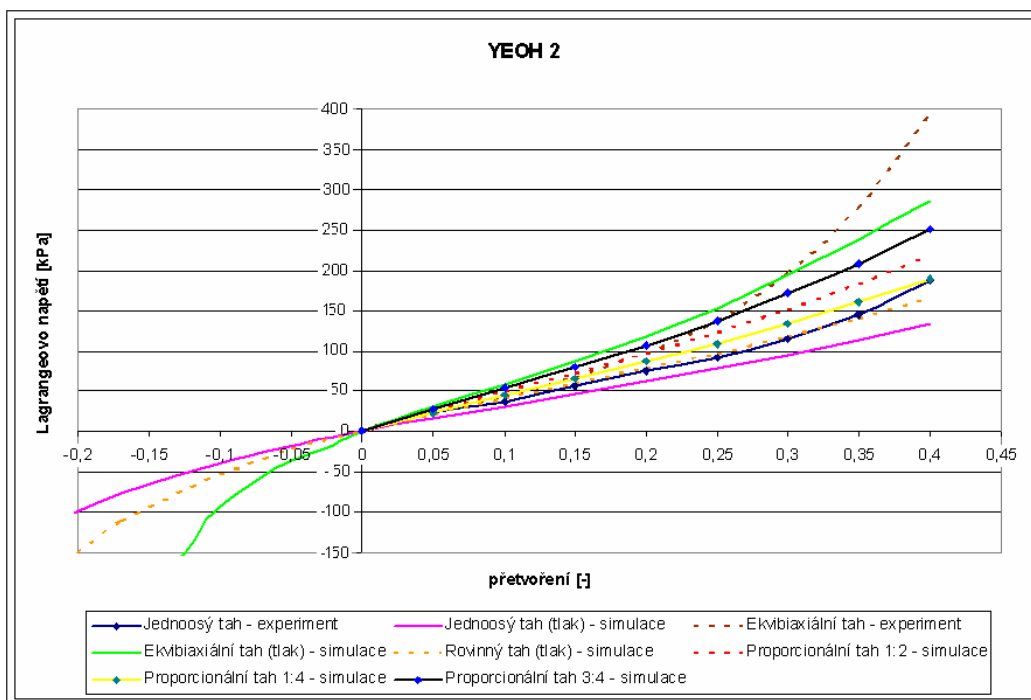
Obr. 8b – Výsledky inflačního testu



Obr. 8c – Výsledky inflačního testu

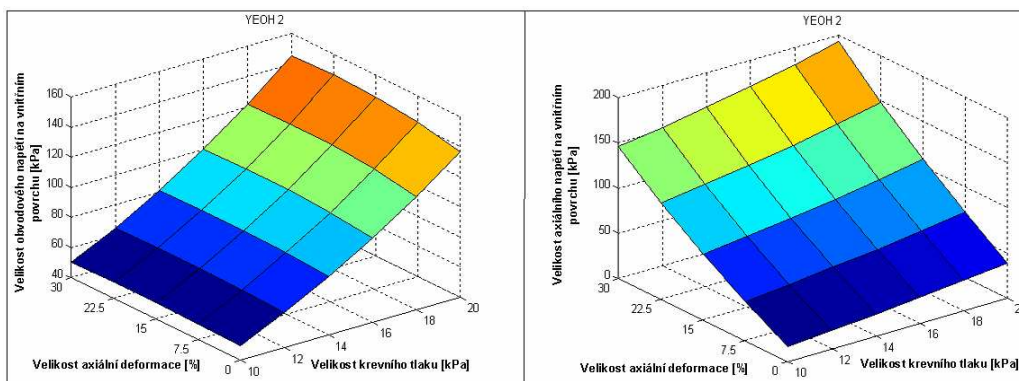
III. Redukovaný polynom: Yeoh 2-parametrický

- při jednoosém tahu výpočtová křivka leží v celém rozsahu deformace pod experimentální, maximální rozdíl mezi oběma se blíží 20% (**Obr.9a**)

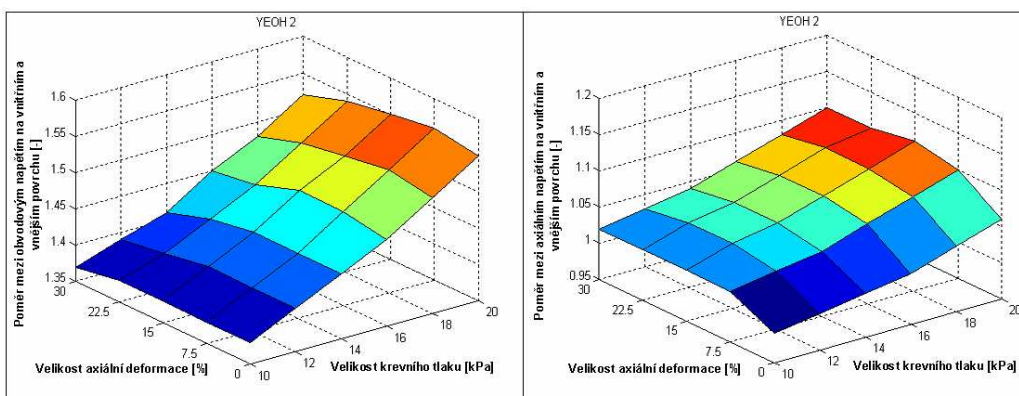


Obr. 9a – Výsledky základních mechanických testů

- při ekvibiaxiálním tahu konstitutivní model vykazuje zpočátku téměř lineární závislost mezi napětím a přetvořením, nepatrná progresse u výpočtová křivky začíná probíhat až při $\varepsilon = 0,2$, maximální rozdíl mezi výpočtovou a experimentální křivkou ekvibiaxiálního tahu je téměř 30% (Obr.9a)
- chování modelu při proporcionálním i rovinném tahu a při tlakových zatíženích odpovídá předpokladům (Obr.9a)
- výsledky inflačního testu korespondují s předpoklady, velikost obvodového a axiálního napětí roste s velikostí krevního tlaku a nepatrně i s velikostí axiální deformace (Obr.9b), obvodové a axiální napětí nabývá maxima na vnitřním povrchu (Obr.9c)



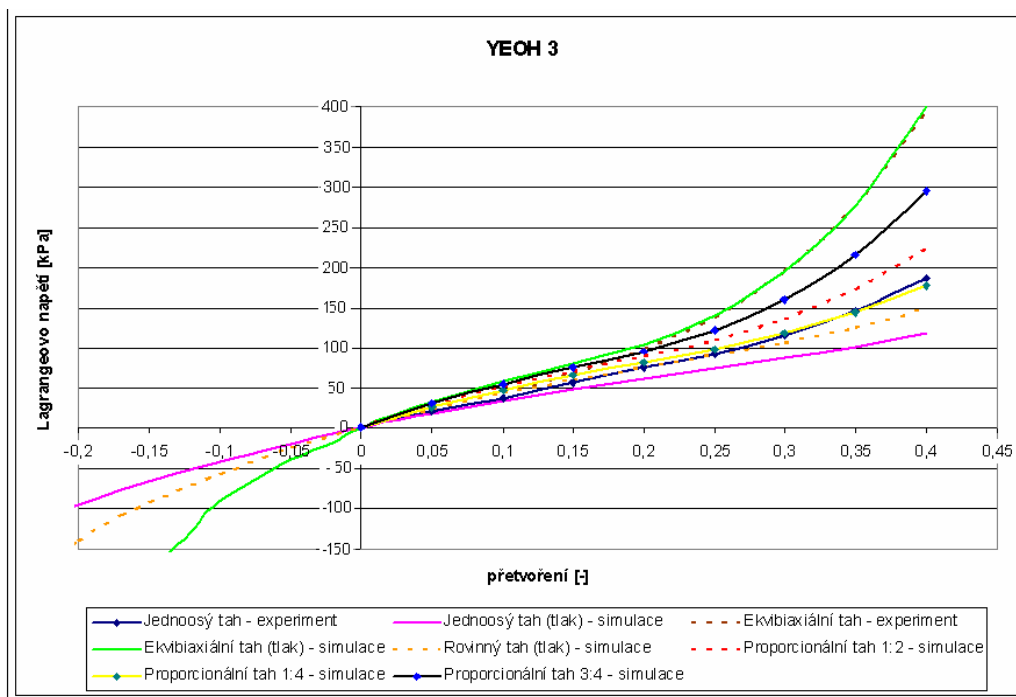
Obr. 9b – Výsledky inflačního testu



Obr. 9c – Výsledky inflačního testu

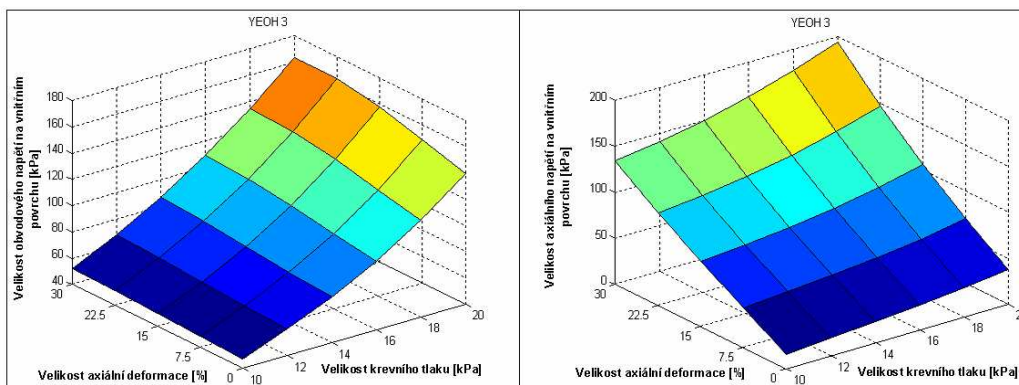
IV. Redukovaný polynom: Yeoh 3-parametrický

- při jednoosém tahu je konstitutivní model v celém rozsahu deformace výrazně poddajnější než experimentální vzorek, experimentální křivka jednoosého tahu se do 25% deformace překrývá s výpočtovou křivkou rovinného tahu, od $\varepsilon = 0,25$ se experimentální křivka jednoosého tahu přibližuje výpočtové křivce proporcionálního tahu s 25% příčnou deformací, maximální rozdíl mezi křivkami jednoosého tahu dosahuje 25% (Obr.10a)
- při ekvibiaxiálním tahu se výpočtová křivka téměř shoduje s experimentální, maximální rozdíl mezi oběma křivkami nepřekračuje 3% (Obr.10a)
- chování modelu při proporcionálním i rovinném tahu a při tlakových zatíženích odpovídá předpokladům (Obr.10a)

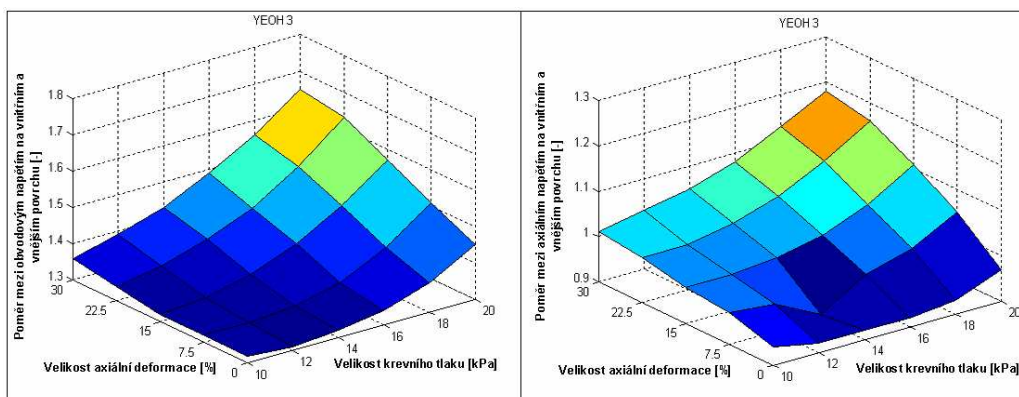


Obr. 10a – Výsledky základních mechanických testů

- při inflačním testu velikost obvodového a axiálního napětí roste s velikostí krevního tlaku a nepatrně i s velikostí axiální deformace, obvodové napětí dosahuje maxima na vnitřním povrchu, axiální napětí je ale při určitých hodnotách krevního tlaku a axiální deformace vyšší na vnějším povrchu - poměr mezi axiálním napětím na vnitřním a vnějším povrchu je menší než jedna (**Obr.10c**)



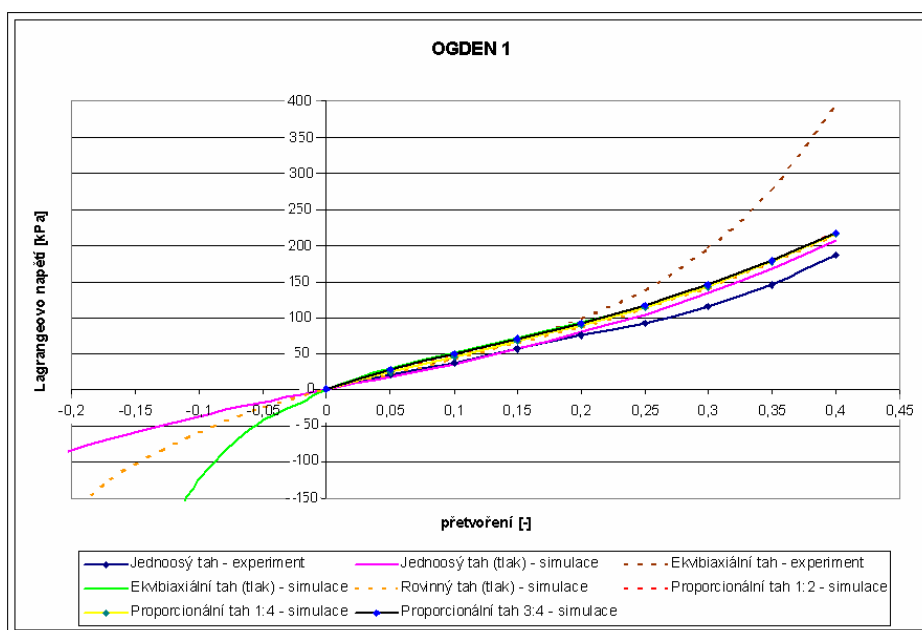
Obr. 10b – Výsledky inflačního testu



Obr. 10c – Výsledky inflačního testu

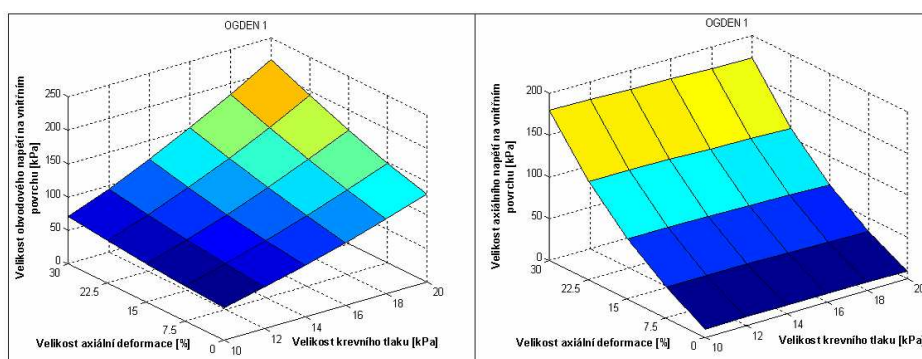
V. Ogden 1. stupně

- v tahové oblasti se téměř všechny výpočtové křivky překrývají (**Obr.11a**)
- chování modelu při tlakových zatíženích odpovídá předpokladům (**Obr.11a**)

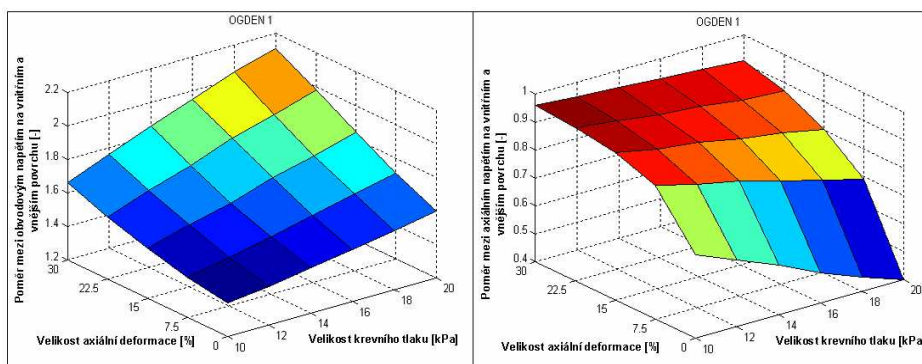


Obr. 11a – Výsledky základních mechanických testů

- při inflačním testu velikost obvodového a axiálního napětí roste s velikostí krevního tlaku i axiální deformace (**Obr.11b**), obvodové napětí nabývá maxima na vnitřním povrchu (**Obr.11c**), axiální napětí je nejvyšší na vnějším povrchu – poměr mezi axiálním napětím na vnitřním a vnějším povrchu je menší než jedna (**Obr.11c**)



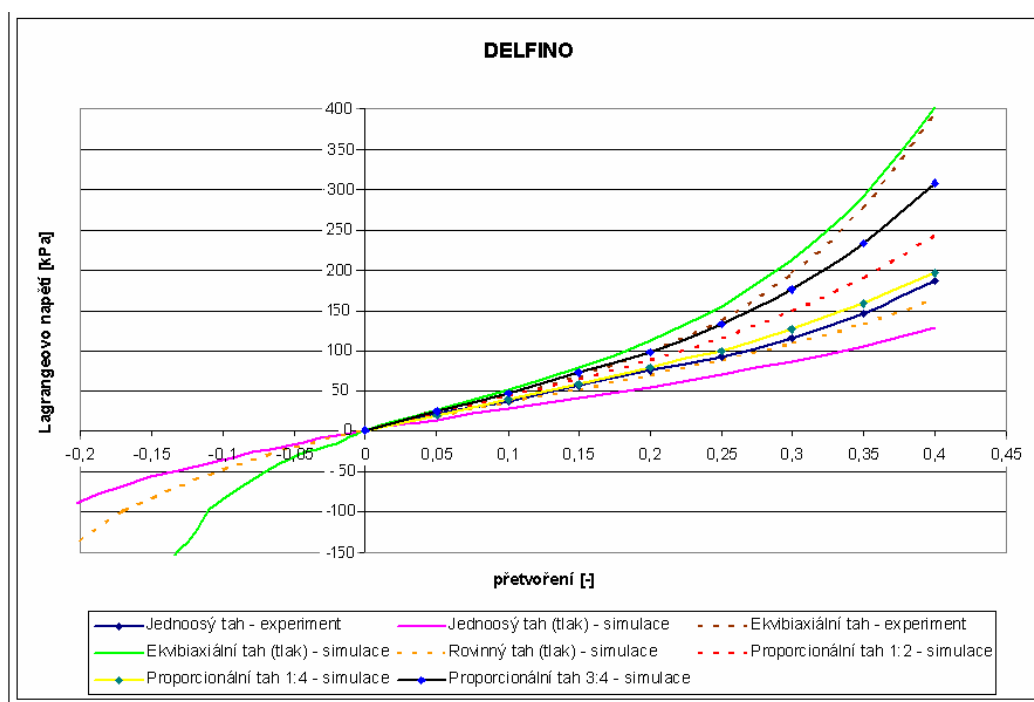
Obr. 11b – Výsledky inflačního testu



Obr. 11c – Výsledky inflačního testu

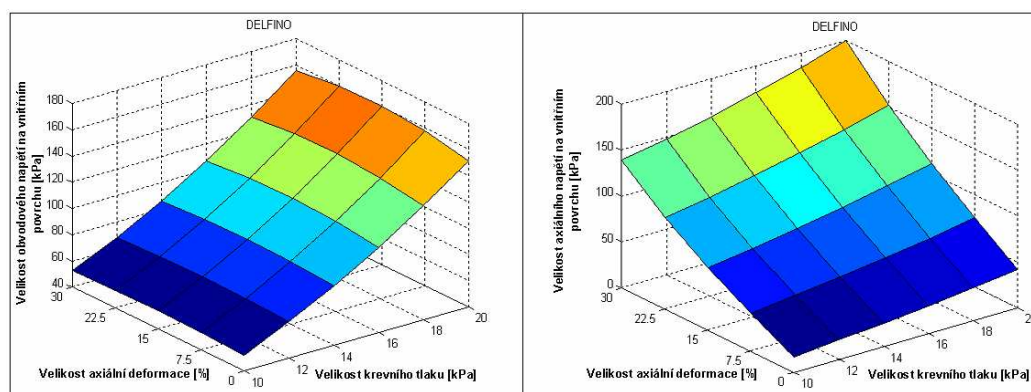
VI. Delfino

- zde úvodu poznamenejme, že jako předloha k nalezení materiálových parametrů tohoto modelu sloužily experimentální křivky rovinného a ekvibiaxiálního tahu
- při rovinném tahu vykazuje konstitutivní model podobné chování jako experimentální vzorek, maximální rozdíl mezi výpočtovou a experimentální křivkou rovinného tahu je do 10% (Obr.12a)
- při ekvibiaxiálním tahu je konstitutivní model v celém rozsahu deformace nepatrně tužší než experimentální vzorek, maximální rozdíl mezi křivkami ekvibiaxiálního tahu dosahuje 7% (Obr.12a)
- chování modelu při proporcionálním i rovinném tahu a při tlakových zatíženích odpovídá předpokladům (Obr.12a)

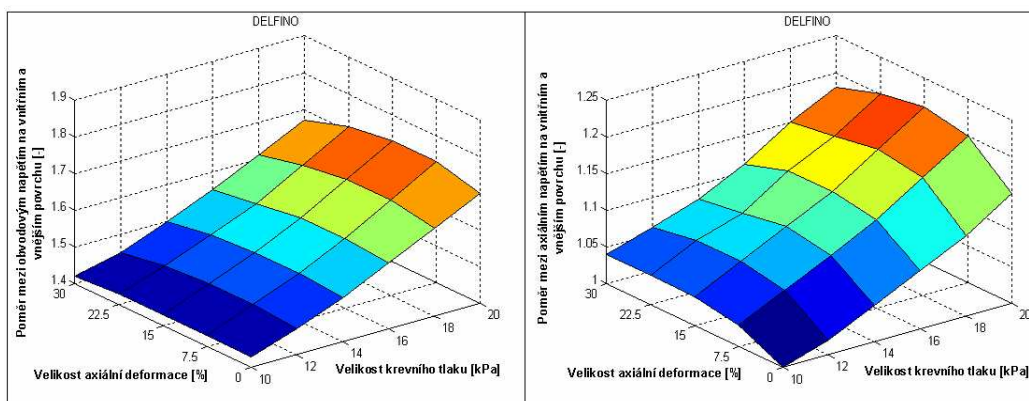


Obr. 12a – Výsledky základních mechanických testů

- výsledky inflačního testu korespondují s předpoklady, velikost obvodového a axiálního napětí roste s velikostí krevního tlaku a nepatrně i s velikostí axiální deformace (Obr.12b), obvodové a axiální napětí nabývá maxima na vnitřním povrchu (Obr.12c)



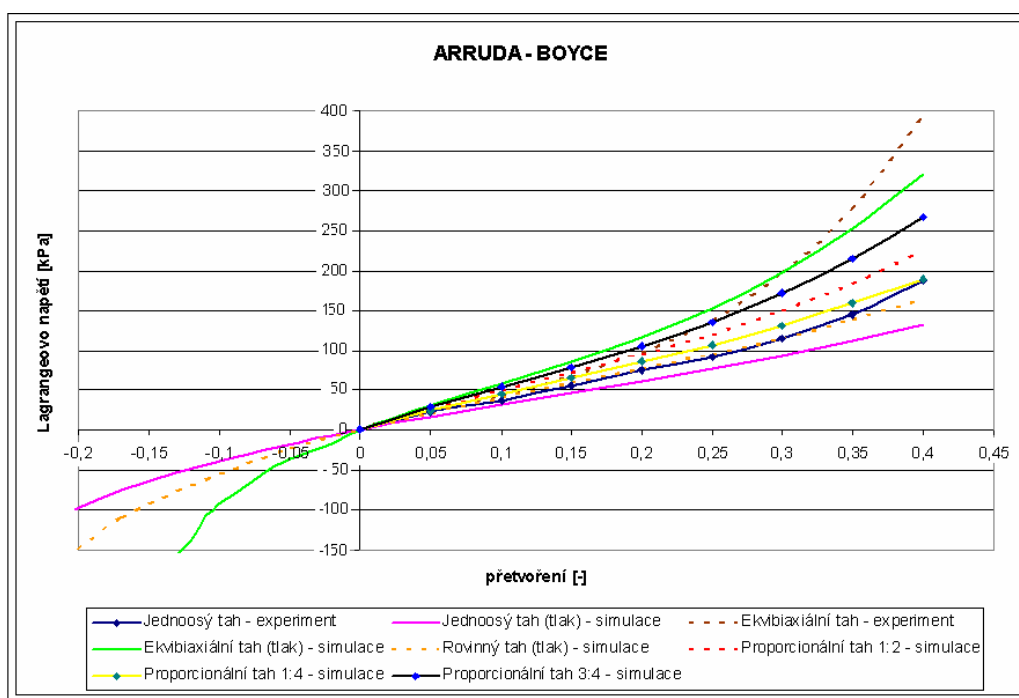
Obr. 12b – Výsledky inflačního testu



Obr. 12c – Výsledky inflačního testu

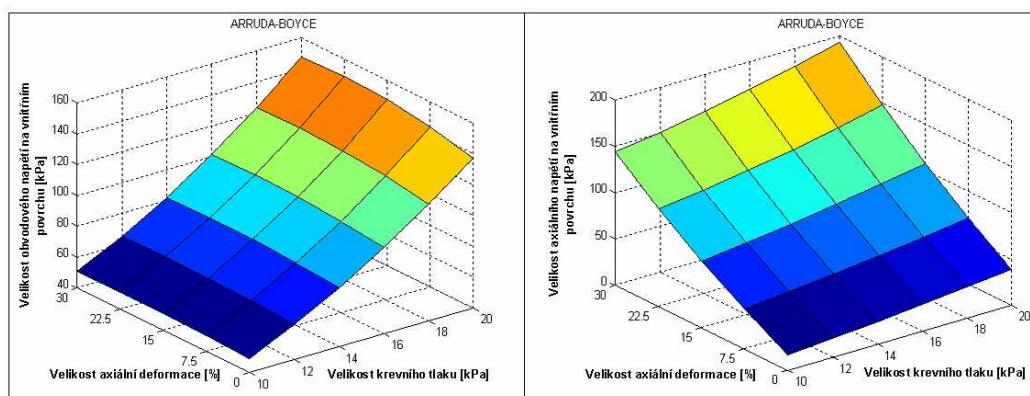
VII. Arruda-Boyce

- při jednoosém tahu je konstitutivní model v celém rozsahu deformace poddajnější než experimentální vzorek, experimentální křivka jednoosého tahu se téměř shoduje s výpočtovou křivkou rovinného tahu, maximální rozdíl mezi křivkami jednoosého tahu je téměř 25% (Obr.13a)
- při ekvibiaxiálním tahu je konstitutivní model zpočátku tužší než experimentální vzorek, od 30% deformace se situace obrací a výpočtová křivka ekvibiaxiálního tahu leží nad experimentální, maximální rozdíl mezi oběma křivkami dosahuje 25% (Obr.13a)
- chování modelu při proporcionálním i rovinném tahu a při tlakových zatíženích odpovídá předpokladům (Obr.13a)

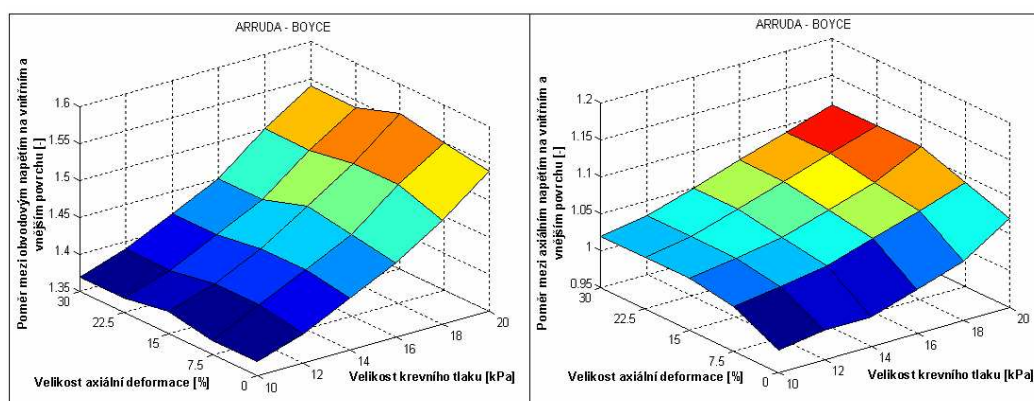


Obr. 13a – Výsledky základních mechanických testů

- výsledky inflačního testu korespondují s předpoklady, velikost obvodového a axiálního napětí roste s velikostí krevního tlaku a nepatrně i s velikostí axiální deformace (Obr.13b), obvodové a axiální napětí je největší na vnitřním povrchu (Obr.13c)



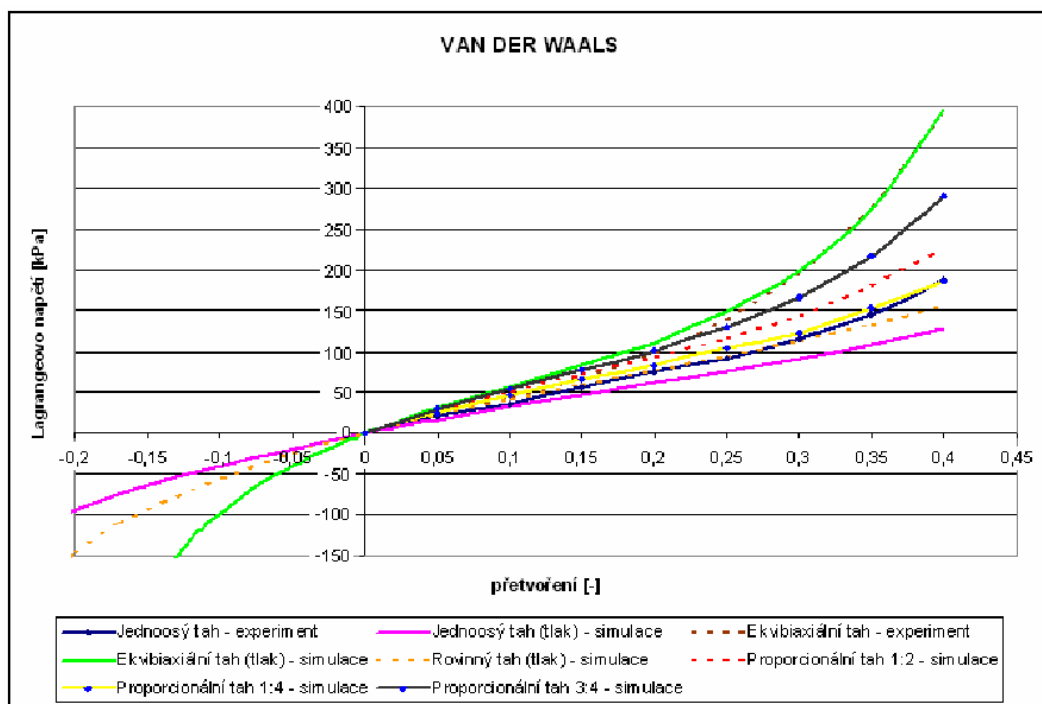
Obr. 13b – Výsledky inflačního testu



Obr. 13c – Výsledky inflačního testu

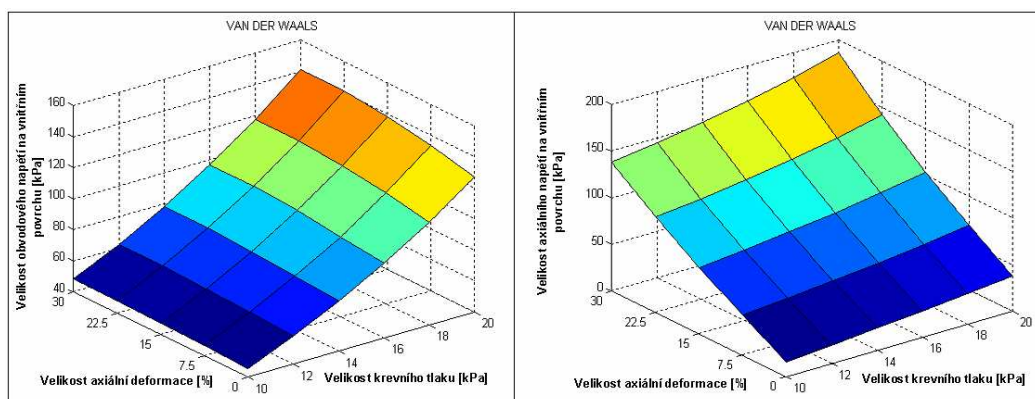
VIII. Van der Waals

- při jednoosém tahu konstitutivní model vykazuje v celém rozsahu deformace téměř lineární závislost mezi napětím a přetvořením, experimentální křivka jednoosého tahu se do 30% deformace překrývá s výpočtovou křivkou rovinného tahu, od $\varepsilon = 0,3$ se experimentální křivka jednoosého tahu přibližuje výpočtové křivce proporcionálního tahu s 25% příčnou deformací, maximální rozdíl mezi křivkami jednoosého tahu dosahuje 25% (Obr.14a)
- při ekvibiaxiálním tahu se výpočtová křivka téměř shoduje s experimentální, maximální rozdíl mezi oběma křivkami nepřekračuje 5% (Obr.14a)
- chování modelu při proporcionálním i rovinném tahu a při tlakových zatíženích odpovídá předpokladům (Obr.14a)

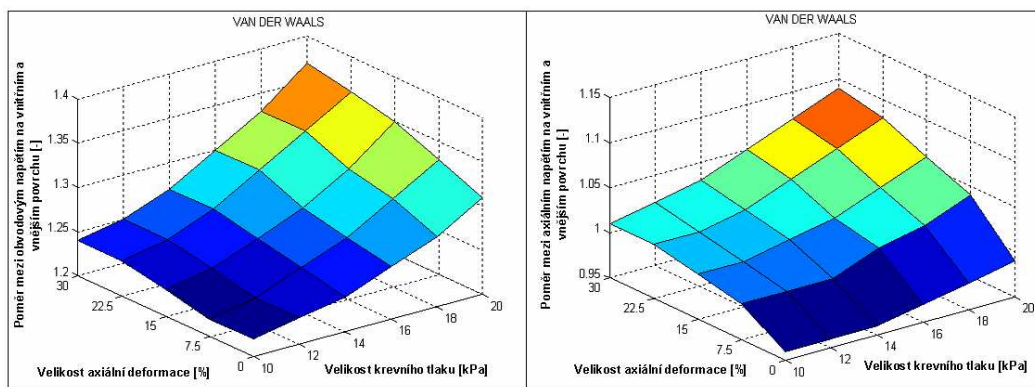


Obr. 14a – Výsledky základních mechanických testů

- při inflačním testu velikost obvodového a axiálního napětí roste s velikostí krevního tlaku a nepatrně i s velikostí axiální deformace, obvodové napětí dosahuje maxima na vnitřním povrchu, axiální napětí je ale při určitých hodnotách krevního tlaku a axiální deformace vyšší na vnějším povrchu – poměr mezi axiálním napětím na vnitřním a vnějším povrchu je menší než jedna (**Obr.14c**)



Obr. 14b – Výsledky inflačního testu



Obr. 14c – Výsledky inflačního testu

Stručné shrnutí výsledků vybraných konstitutivních modelů uvádím v [Tab.3].

Název použitého konstitutivního modelu	Průměrný rozdíl mezi napětími z experimentu a simulace jednoosého tahu [%]	Průměrný rozdíl mezi napětími z experimentu a simulace ekvibiaxiálního tahu [%]	Stručné zhodnocení výsledků inflačního testu
Mooney-Rivlin 3	10	10	axiální napětí dosahuje maxima na vnějším povrchu
Polynom 2. stupně	10	5	axiální napětí dosahuje maxima na vnějším povrchu
Yeoh 2	20	20	výsledky souhlasí s předpoklady
Yeoh 3	23	8	axiální napětí dosahuje maxima na vnějším povrchu
Ogden 1. stupně	15	50	axiální napětí dosahuje maxima na vnějším povrchu
Delfino	25	12	výsledky souhlasí s předpoklady
Arruda-Boyce	19	22	výsledky souhlasí s předpoklady
Van der Waals	21	10	axiální napětí dosahuje maxima na vnějším povrchu

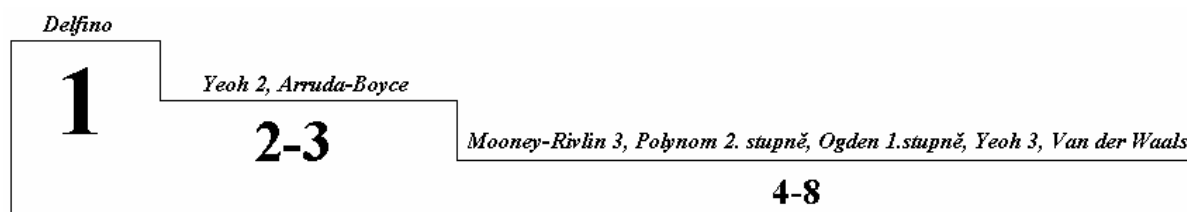
[Tab. 3] – Shrnutí výsledků vybraných konstitutivních modelů

Při inflačním testu simulujeme chování intaktní aorty („symetrické válcové trubky“), u které extrémní hodnoty napětí vznikají na vnitřním povrchu. Většina vybraných konstitutivních modelů ale tento předpoklad nesplňuje, nechová se korektně, axiální napětí u nich nabývá maxima na vnějším povrchu, kdy poměr mezi axiálním napětím na vnitřním a vnějším povrchu je menší než jedna [Tab.3]. Pro další aplikace tyto konstitutivní modely primárně vylučuji (Mooney-Rivlin 3, Polynom 2. stupně, Yeoh 3, Ogden 1. stupně, Van der Waals).

Hodnotíme dále pouze konstitutivní modely Yeoh 2, Delfino, Arruda-Boyce.

Při jednoosém tahu všechny tři vykazují obdobné chování. Výpočtová křivka jednoosého tahu leží v celém rozsahu deformace nad experimentální, konstitutivní model je poddajnější než experimentální vzorek. Průměrný rozdíl v napětích z experimentu a simulace jednoosého tahu se u všech modelů pohybuje kolem 20% [Tab.3].

Při ekvibiaxiálním tahu jsou všechny tři konstitutivní modely v počáteční části deformačně-napěťové charakteristiky tužší než experimentální vzorek, přičemž u modelů Arruda-Boyce a Yeoh 2 nastává progresse pozvolněji než u konstitutivního modelu Delfino, kdy výpočtová křivka ekvibiaxiálního tahu konstitutivního modelu Delfino vykazuje v celém rozsahu deformace dobrou shodu s experimentální závislostí (Obr.12a). U konstitutivních modelů Arruda-Boyce a Yeoh 2 se naopak výpočtová křivka ekvibiaxiálního tahu postupně od $\varepsilon = 0,3$ vzdaluje od experimentální charakteristiky, při maximálním přetvoření se rozdíl mezi napětími ze simulace a experimentu u obou modelů blíží 25% (Obr.9a,13a). Výsledky volby vhodného konstitutivního modelu dopadly následovně (Obr.15):



Obr. 15 – Výsledek volby vhodného konstitutivního modelu

5.4 Testovací úlohy s konstitutivním modelem Holzapfel

Konstitutivní model Holzapfel v současnosti představuje jeden z nejdokonalejších prostředků pro popis směrových vlastností cévní tkáně, kdy zohledňuje její strukturní nehomogenitu současným uvažováním až dvou osnov kolagenních vláken ve dvouvrstvé geometrii [20]. Poskytuje tedy výsledky srovnatelné s chováním vláknového kompozitu, jehož odezva na vnější zatížení není obecně izotropní. Při jednoosém tahu kompozitního materiálu ve směru totožném s vlákny nebo kolmo na ně vzniká pouze délková deformace, úhly zůstanou pravé. Svírají-li ale vlákna se směrem zatížení jiný úhel než nulový či pravý, změní se mimo délky i úhly. Uvažujeme-li deformační variantu jednoosého tahu, pak orientace vláken má podstatný vliv na velikost napjatosti uvnitř kompozitu. Platí, že čím více jsou vlákna orientovaná do směru zatížení, tím větší napjatost uvnitř kompozitu vzniká.

Zatěžujeme-li vnitřním tlakem dvouvrstevnou trubku s odlišnými vlastnostmi v každé vrstvě, napětí po tloušťce mají „exponenciální“ průběh se skokovou změnou na rozhraní mezi oběma vrstvami. Změna materiálových vlastností ale průběh přetvoření po tloušťce stěny neovlivňuje.

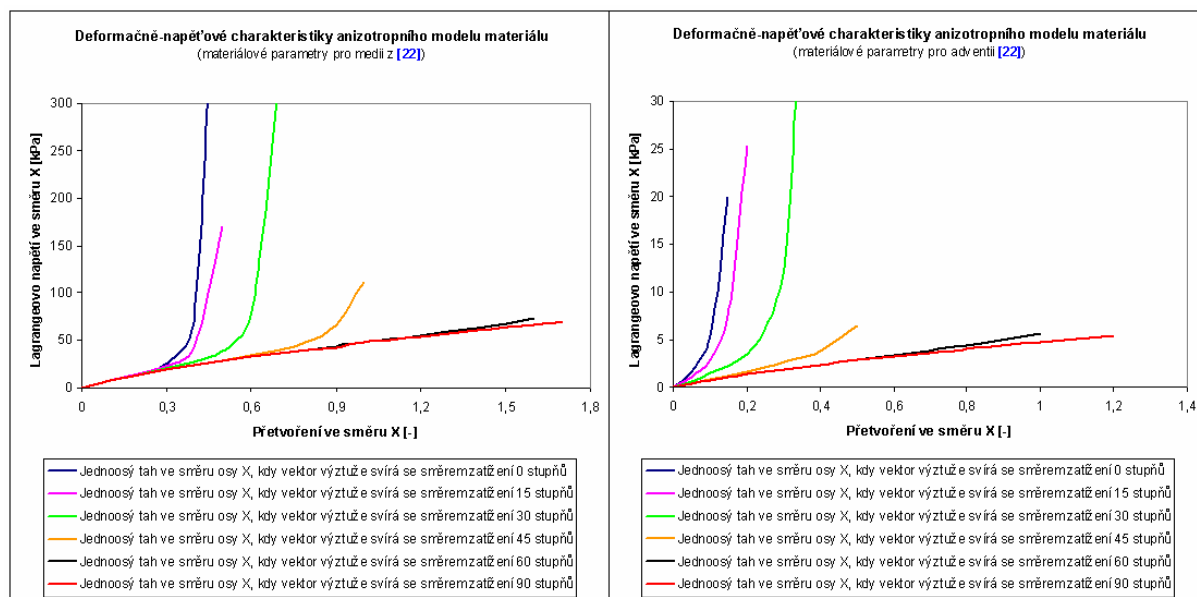
S těmito předpoklady musí korespondovat i chování konstitutivního modelu Holzapfel při simulaci jednoosého tahu a inflačního testu. Pro simulaci obou testovacích úloh používám materiálové parametry modelu Holzapfel z [23]: media ($c_{10} = 27 \text{ kPa}$; $k_1 = 0,64 \text{ kPa}$; $k_2 = 3,54$; $\varphi = 10^\circ$) a adventitia ($c_{10} = 2,7 \text{ kPa}$; $k_1 = 5,1 \text{ kPa}$; $k_2 = 15,4$; $\varphi = 40^\circ$) lidské věnčité tepny.

Jednoosý tah: - prostorový, kvadratický, dvacetizulový prvek zatěží deformacně ve směru X , kdy jednotkový vektor jediné výztuže leží v rovině XY a se směrem zatížení svírá úhel α , k tomuto účelu používám materiálové parametry medie i adventitie z [23], vzniklá napjatost velikostně odpovídá skutečnému (Cauchymu) napětí

Inflační test: - prostorovou, dvouvrstevnou trubku o vnitřním průměru 10 mm, tloušťce vnitřní vrstvy 1,5 mm a tloušťce vnější vrstvy 0,5 mm (pro ilustraci realizuji následně i případ s dvojnásobným vnitřním průměrem při zachování původních tloušťek) postupně zatěží vnitřním tlakem o velikostech 13 až 20 kPa při zabráněné podélné deformaci, směrové vlastnosti jsou předepsány v kartézském souřadném systému každého uzlu jako funkce jeho polohy [19], pro vnitřní (vnější) vrstvu užívám materiálové parametry medie (adventitie) z [23]

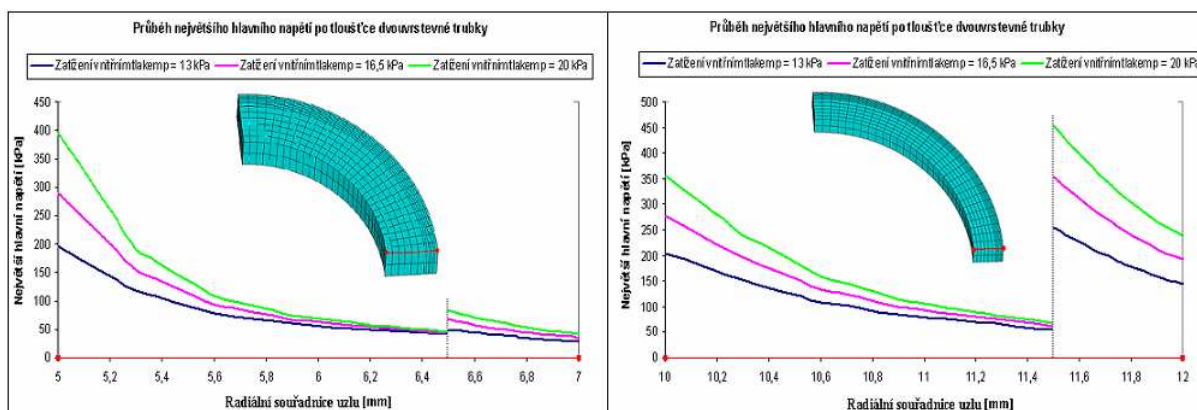
5.4.1 Výsledky testovacích úloh s konstitutivním modelem Holzapfel

- výsledky simulace jednoosého tahu ve směru X (**Obr.16**) jednoznačně ukazují, že čím menší úhel mezi směrem zatížení a jednotkovým vektorem jediné výztuže existuje, tím větší napětí ve směru X vzniká (platí pro medii i adventitii); čím více i vlákna medie a adventitie leží ve směru zatížení, tím menší je velikost přetvoření, při kterém nastává zpevňování deformačně-napětíové charakteristiky (**Obr.16**); velikost napětí i deformace, při které dochází k progresi deformačně-napětíové charakteristiky, je ve všech případech větší u tužší medie (**Obr.16**)



Obr. 16– Deformačně-napětíové charakteristiky anizotropního modelu materiálu

- při inflačním testu dvouvrstevné trubky velikost obvodového (největšího hlavního) napětí roste s velikostí vnitřního tlaku; na rozhraní mezi oběma vrstvami dochází ke skokové změně napětí; míra změny napětí na rozhraní závisí zejména na geometrii (průměrech) trubky, materiálové parametry jednotlivých vrstev velikost skoku příliš neovlivňují (**Obr.17**)



Obr. 17– Výsledky inflačního testu

Výsledky testovacích úloh korespondují s teoretickými předpoklady, konstitutivní model Holzapfel se při simulaci jednoosého tahu i inflačního testu chová korektně, lze jej tedy použít i při složitějších deformačně-napětíových analýzách.

6 MODEL VAZEB A ZATÍŽENÍ

Tepna představuje válcovou trubku současně zatíženou pulsujícím krevním tlakem, axiálním předpětím a reziduální (zbytkovou) napjatostí.

Zbytková napětí výrazně ovlivňují průběh obvodového napětí po tloušťce stěny. Záporná tlaková na vnitřním povrchu snižují velikost obvodového napětí, kladná tahová na vnějším povrchu ho zvyšují. Existence zbytkových napětí způsobuje samovolné rozevření tepny při podélném rozříznutí její stěny. Míru zbytkových napětí kvantifikujeme pomocí tohoto úhlu rozevření. V této práci ale zbytková napětí nejsou do modelu vazeb a zatížení zahrnuta.

Axiální předpětí dosahuje v intaktní aortě velikosti až 30%. Vlivem strukturních změn uvnitř stěny ale nastává pokles celkové velikosti axiálního předpětí. U výdutě abdominální aorty velikost nepřekračuje 10%. Do modelu vazeb a zatížení axiální předpětí zahrnujeme předepsáním geometrické okrajové podmínky v podélném směru pro horní a spodní konec geometrie. V této práci uvažují nulové axiální předpětí, kdy příčný řez se nachází v rovinné deformaci a u prostorového modelu je zabráněno axiálnímu posuvu jeho horní a spodní plochy.

Během jednoho srdečního cyklu se velikost krevního tlaku pohybuje u zdravého člověka mezi 11 až 15 kPa. Okamžitý fyzický a psychický stav člověka ale toto rozpětí významně ovlivňuje, z dlouhodobého hlediska k postupnému nárustu rovněž dochází. V této práci zahrnují působení krevního tlaku do modelu vazeb a zatížení předepsáním příslušné silové okrajové podmínky (tlaku) na vnitřní plochu. Zadávaný statický tlak velikostně odpovídá amplitudě krevního tlaku.

Vazby cévy s okolní tkání velice obtížně určujeme. Zpravidla tedy uvažujeme samostatnou cévu bez kontaktu s okolní tkání, kdy možnému pohybu zabráňujeme předepsáním příslušných geometrických okrajových podmínek. V této práci zamezují pohybu příčného řezu i jednoduchého prostorového modelu předepsáním nulových obvodových posuvů do všech uzlů ve válcovém souřadném systému. Tuto podmínku uplatňuji na základě blízké podobnosti geometrie výdutě s válcovým tělesem.

7 MODEL GEOMETRIE

Za model geometrie výdutě se standardně užívá geometrie vytvořená ze snímků získaných počítačovým tomografem (CT). Každý tento snímek ale představuje deformovanou (zatíženou) konfiguraci od krevního tlaku, axiálního předpětí a reziduální napjatosti. Předepsáním příslušných okrajových podmínek v některém konečnoprvkovém systému tuto konfiguraci zatížíme již podruhé. Tento nedostatek se pokusím odstranit nalezením takové redukované („nezatížené“) konfigurace, jejíž deformovaný obraz od zatížení v MKP se bude velmi blížit výchozí geometrii (výstupnímu obrazu z CT). Řeším tedy inverzní úlohu.

Možnost nalézt redukovanou („nezatíženou“) geometrii na základě odlehčení výchozí geometrie „negativním“ tlakem o velikosti odpovídající průměrné hodnotě krevního tlaku okamžitě vylučuji. Prostorový model AAA vykazuje značnou geometrickou imperfekci, kdy energie napjatosti již na počátku kromě membránových složek obsahuje ohybová napětí, tj. tlakovým zatížením této konfigurace dochází k jejímu zborcení. Situaci navíc komplikuje skutečnost, že zjednoduším-li geometrii AAA na válcovou trubku, kterou odlehčím „negativním“ tlakem 13 kPa, následně z ní odstráním napjatost (v ANSYS-u příkazem UPGEOM) a zpětně zatížím tlakem o stejné velikosti, nezískám výchozí konfiguraci. Obraz bude v případě izotropního modelu menší resp. větší u anizotropního modelu. Odlehčovací a inflační tlak se tedy nerovnají.

7.1 Návrh metody pro nalezení redukované geometrie

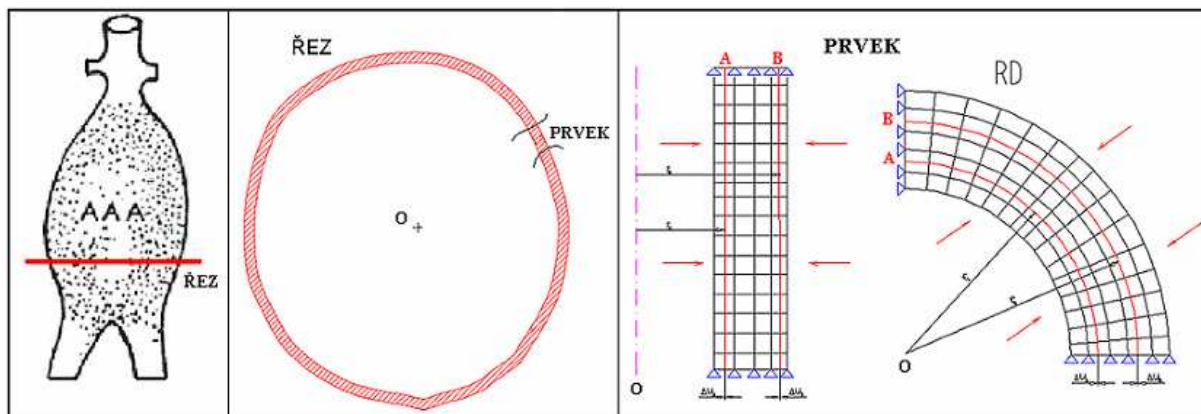
Mějme geometrii sestavenou z CT snímků. Polohu každého bodu této geometrie určují tři souřadnice r , φ , z . Hledání „nezatíženého“ stavu (redukované geometrie) znamená přepočíst tyto souřadnice, tj. každému bodu přiřadit pole posuvů u , v , w , které zůstane stejné při odlehčení výchozí konfigurace z CT i následné zpětné inflaci jejího deformovaného, beznapětového obrazu.²

Navrhuji tedy provést dekompozici prostorového modelu na jednotlivé transversální řezy, které rozdělím na jednotlivé prvky. Prvek v axisymetrii nebo rovinné deformaci odlehčím „negativním“ tlakem (velikost si volí uživatel, pro primární ilustraci může souhlasit s hodnotou inflačního tlaku). Z prvku poté odstráním napjatost (v ANSYS-u příkazem UPGEOM) a zpátky jej zatížím krevním tlakem o velikosti 13 kPa. Na prvku následně vyhodnotím polohu dvou libovolných bodů v každé jeho vrstvě, tj. odpovídá-li jejich současná poloha poloze těchto bodů ve výchozí konfiguraci. Existuje-li rozdíl v souřadnicích těchto bodů, změnou „negativního“ tlaku tento postup opakuji do okamžiku shody polohy bodů (**Obr.18**).

Tento postup realizuji pro všechny prvky každého řezu, kdy uvažuji jen změnu radiální souřadnice, tj. na každém prvku dvěma libovolným bodům každé vrstvy hledám pouze radiální posuv u , který zůstává stejný při odlehčení i zpětné inflaci. Tímto zjednodušením se samozřejmě dopouštím určité chyby, neboť jednotlivé body prostorového excentrického modelu AAA mění vlivem zatížení svou

² Pořadí jednotlivých kroků velikost posuvů ovlivňuje. Zatížíme-li prvne geometrii krevním tlakem a následně ji odlehčíme, získáme jiné pole posuvů než při obráceném sledu kroků.

polohu i v axiálním směru, a obvodové posuvy rovněž nezůstávají zcela nulové. Velikosti axiálního a obvodového posuvu každého bodu jsou ale vzhledem k velikosti radiálního nepodstatné.



Obr. 18 – Dekompozice výchozí geometrie na jednotlivé prvky

Nemění-li se po celém obvodu řezu tloušťky všech jeho vrstev, pak lze hledání radiálních posuvů dvou bodů každé vrstvy na každém prvku řezu rovněž chápat jako hledání radiálních posuvů dvou bodů každé vrstvy na jediném (fiktivním) prvku s různými poloměry, na kterých body leží. Různým poloměrům vnější, vnitřní a dělicích ploch prvku při zachování tloušťek vrstev tedy přiřazují radiální posuv, který zůstává stejný při odlehčení i zpětné inflaci. Sestrojením funkčních závislostí (regresní analýzou) radiálních posuvů dvou bodů každé vrstvy na poloměru získávám snadný prostředek pro přepočtení výchozí geometrie o konstantní tloušťce každé vrstvy po celém obvodu řezu na geometrii redukovanou.

Přepočet jednovrstevné výchozí geometrie o konstantní tloušťce na geometrii redukovanou:

- přepočet jednovrstevné geometrie o konstantní tloušťce po celém obvodu řezu vyžaduje vybrat dva libovolné body; za vhodné se jeví zvolit body na vnitřním a vnějším povrchu prvku

Funkční závislost radiálního posuvu vnitřní a vnější plochy prvku na svém poloměru:

$$u_1 = f(r_1) \quad u_2 = f(r_2) \quad (7.1)$$

Redukovaný vnitřní a vnější poloměr prvku:

$$r_1' = r_1 - u_1(r_1) \quad r_2' = r_2 - u_2(r_2) \quad (7.2)$$

Souřadnice bodů na vnitřní a vnější ploše redukované geometrie:

$$\begin{aligned} X_1' &= [r_1 - u_1(r_1)] \cos \varphi & X_2' &= [r_2 - u_2(r_2)] \cos \varphi \\ Y_1' &= [r_1 - u_1(r_1)] \sin \varphi & Y_2' &= [r_2 - u_2(r_2)] \sin \varphi \end{aligned} \quad (7.3)$$

Přepočet dvouvrstevné výchozí geometrie o konstantní tloušťce na geometrii redukovanou:

- přepočet dvouvrstevné geometrie o konstantních tloušťkách obou vrstev po celém obvodu řezu vyžaduje vybrat dva libovolné body v každé vrstvě; za vhodné se jeví zvolit body na vnitřním, vnějším povrchu prvku a na rozhraní mezi jeho vrstvami, tento výběr pro přepočet geometrie plně postačuje, neboť bod na rozhraní se vztahuje k oběma vrstvám

Funkční závislost radiálního posuvu vnitřní, dělicí a vnější plochy prvku na svém poloměru:

$$u_1 = f(r_1) \quad u_D = f(r_D) \quad u_2 = f(r_2) \quad (7.4)$$

Redukovaný vnitřní, dělicí a vnější poloměr prvku:

$$r_1' = r_1 - u_1(r_1) \quad r_D' = r_D - u_D(r_D) \quad r_2' = r_2 - u_2(r_2) \quad (7.5)$$

Souřadnice bodů na vnitřní, dělicí a vnější ploše redukované geometrie:

$$\begin{aligned} X_1' &= [r_1 - u_1(r_1)] \cos \varphi & X_D' &= [r_D - u_D(r_D)] \cos \varphi & X_2' &= [r_2 - u_2(r_2)] \cos \varphi \\ Y_1' &= [r_1 - u_1(r_1)] \sin \varphi & Y_D' &= [r_D - u_D(r_D)] \sin \varphi & Y_2' &= [r_2 - u_2(r_2)] \sin \varphi \end{aligned} \quad (7.6)$$

Přepočít tří- a vícevrstevné výchozí geometrie o konstantní tloušťce na geometrii redukovanou:

- za vhodné se jeví zvolit body na vnitřním, vnějším povrchu prvku a na rozhraní každé jeho vrstvy

Funkční závislost radiálního posuvu vnitřní, ité-dělicí a vnější plochy prvku na svém poloměru:

$$u_1 = f(r_1) \quad u_{Di} = f(r_{Di}) \quad u_2 = f(r_2) \quad (7.7)$$

Redukovaný vnitřní, ité-dělicí a vnější poloměr prvku:

$$r_1' = r_1 - u_1(r_1) \quad r_{Di}' = r_{Di} - u_{Di}(r_{Di}) \quad r_2' = r_2 - u_2(r_2) \quad (7.8)$$

Souřadnice bodů na vnitřní, ité-dělicí a vnější ploše redukované geometrie:

$$\begin{aligned} X_1' &= [r_1 - u_1(r_1)] \cos \varphi & X_{Di}' &= [r_{Di} - u_{Di}(r_{Di})] \cos \varphi & X_2' &= [r_2 - u_2(r_2)] \cos \varphi \\ Y_1' &= [r_1 - u_1(r_1)] \sin \varphi & Y_{Di}' &= [r_{Di} - u_{Di}(r_{Di})] \sin \varphi & Y_2' &= [r_2 - u_2(r_2)] \sin \varphi \end{aligned} \quad (7.9)$$

Navrhovanou metodu, kterou výchozím řežům výdutě přiřazuji jejich redukované obrazy, lze uskutečnit za podmínky znalosti radiálních souřadnic každého bodu výchozího řezu, tj. polohy počátku souřadného systému. Zde musím přiznat, že o poloze počátku souřadného systému obecně nic nevíme. Osobně zastávám názor, že korektně zjistíme vstupní údaje (radiální souřadnice bodů) ztotožněním počátku souřadného systému se středem otvoru výchozího řezu. K poloze středu otvoru výchozího řezu tedy vztahuji polohu všech jeho bodů.

Navrhovaná metoda přináší ale celkem dva výstupy. Kromě radiálního posuvu se jedná o „negativní“ tlak, kterým prvek odlehčuji. Jeho velikost zpravidla neodpovídá průměrnému krevnímu tlaku. V případě izotropního (anizotropního) modelu je „negativní“ tlak vyšší (nižší). Možnost nalézt redukovanou geometrii odlehčením výchozí konfigurace působením tohoto tlaku představuje neproveditelnou variantu v důsledku existence složitých tvarových imperfekcí ve výchozí geometrii. Tlakovým zatížením této konfigurace tedy dochází k jejímu zborcení.

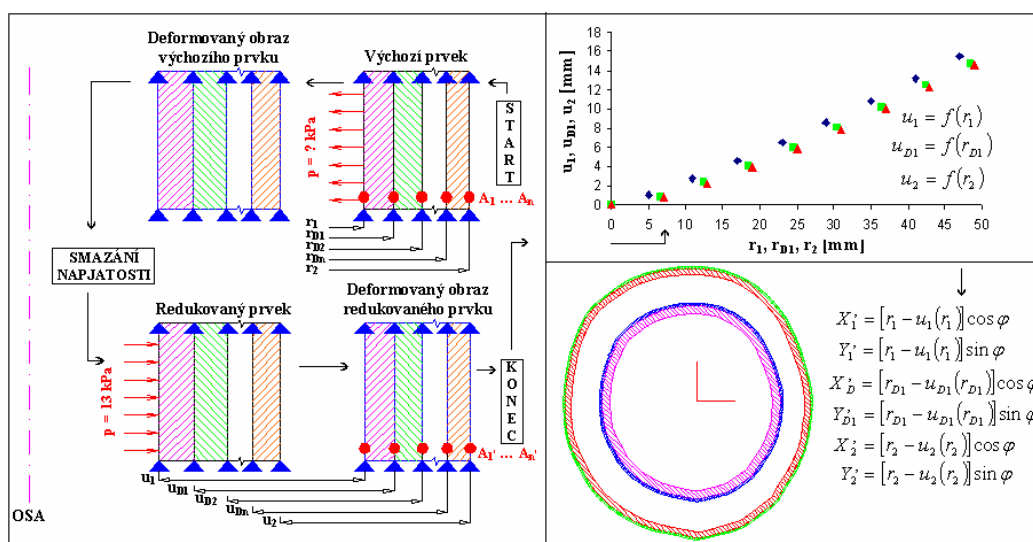
Shrnutí metody pro nalezení redukované geometrie

Bodům na vnitřním, vnějším poloměru a v případě vícevrstevné geometrie i bodům na rozhraní mezi vrstvami (na dělicích poloměrech) prvku změnou negativního tlaku přiřadím radiální posuv, který zůstává stejný při odlehčení i zpětné inflaci. Provádím tedy optimalizaci, při které pevnými parametry jsou

geometrie prvku, model vlastností a inflační tlak. Prostředkem optimalizace je negativní tlak a výstupem z optimalizace jsou radiální posuvy.

a) V případě proměnné tloušťky některé vrstvy po obvodu výchozího řezu, uskutečním přepočty výchozí geometrie na redukovanou pro všechny prvky výchozího řezu. Stanovené radiální posuvy všech prvků výchozího řezu poté odečtu od jejich radiálních souřadnic.

b) Nemění-li se po obvodu výchozího řezu tloušťky všech jeho vrstev, pak realizuji optimalizační úlohu pouze pro jediný (fiktivní) prvek, kdy postupně hledám patřičné radiální posuvy pro jiné poloměry vnitřní, vnější a dělicí plochy prvku při zachování tloušťek všech jeho vrstev. Získám tedy množinu radiálních posuvů pro určité hodnoty poloměrů. Z nich následně sestrojím (regresní analýzou) funkční závislosti (radiální posuvy vnitřní, dělicí a vnější plochy prvku na svém poloměru). Do stanovených závislosti nakonec dosadím radiální souřadnice všech bodů výchozího řezu a výsledky (radiální posuvy) od radiálních souřadnic odečtu (**Obr.19**).



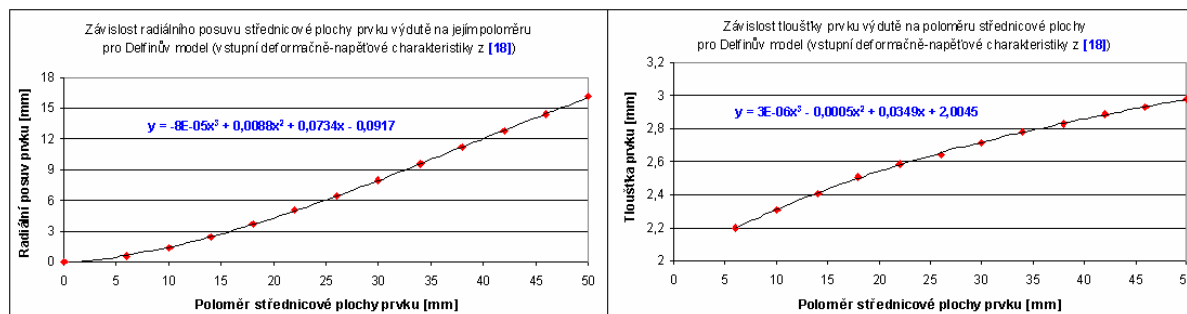
Obr. 19 – Návrh metody pro nalezení redukované geometrie

7.1.1 Testovací úloha navrhované metody

Za výchozí obraz z CT použiji geometrii příčného řezu AAA znázorněnou na str. 36 na **Obr.18**. Jedná se o jednovrstevnou, elipsovitou, nepatrně excentrickou konfiguraci o poloměru střednicové plochy v intervalu 28,5 až 35,5 mm s maximem v levé části uprostřed. Počátek souřadného systému souhlasí se středem otvoru řezu. Tloušťka se po obvodu výrazně nemění, lze ji považovat za konstantní, velikost se rovná 2 mm. Ve spodní části si lze všimnout nepatrné tvarové imperfekce (vyboulení). Této konfiguraci hledám redukovanou geometrii, jejíž deformovaný obraz od krevního tlaku 13 kPa bude souhlasit s výchozí geometrií. Za vhodný model vlastností volím hyperelastický, izotropní konstitutivní model Delfino (**kapitola 5.3**).

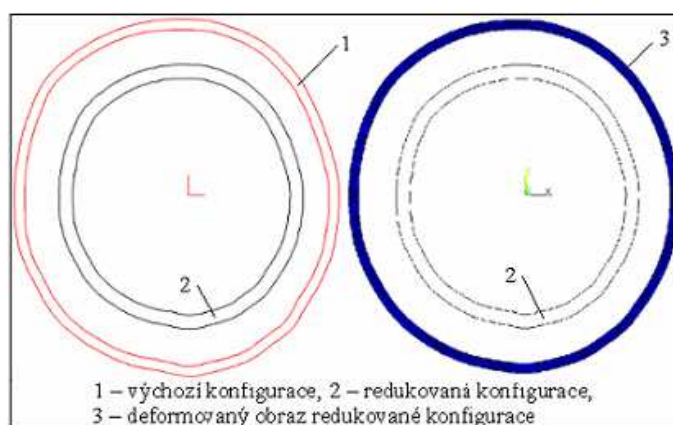
Bodům na vnitřním a vnějším povrchu prvku vždy o tloušťce 2 mm stanovím pro různé poloměry odpovídající radiální posuv, který zůstává stejný při odlehčení i zpětné inflaci. Poté sestrojím

funkční závislosti radiálního posuvu střednicové plochy na svém poloměru a tloušťky prvku na poloměru střednicové plochy (**Obr.20**).



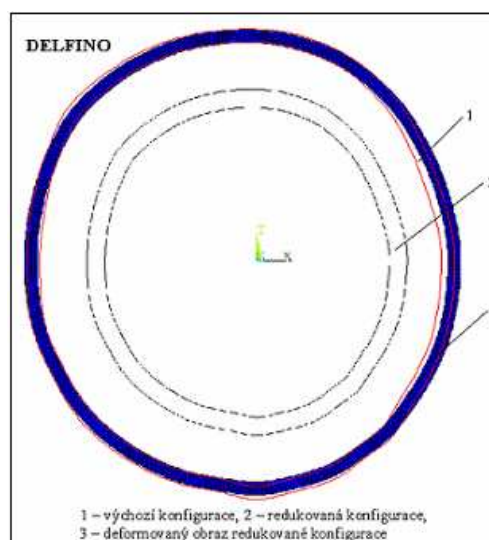
Obr. 20 – Regresní závislosti

Do závislostí radiálního posuvu střednicové plochy resp. tloušťky na poloměru dosadím střednicový poloměr každého prvku výchozího řezu a provedu přepočet jeho radiálních souřadnic. Výsledkem je nový redukovaný střednicový rozměr a nová tloušťka řezu. Transformačními rovnicemi poté určím v kartézském souřadném systému polohu všech bodů na vnější a vnitřní ploše redukovaného řezu. Tuto redukovanou geometrii nakonec v MKP zatížím krevním tlakem o velikosti 13 kPa (**Obr.21**).



Obr. 21 – Výchozí geometrie, redukovaná geometrie, deformovaný obraz redukované geometrie

Deformovaný obraz redukované geometrie se celkově blíží výchozí geometrii (**Obr.22**). Určitého rozdílu si lze všimnout zejména v pravé části, kde se deformovaný obraz více vzdaluje od středu než výchozí geometrie. Maximální vzájemný rozdíl v radiální souřadnici dosahuje 8%. Další odchylka existuje ve spodní části, kde u deformovaného obrazu redukované konfigurace zcela chybí tvarová imperfekce (vyboulení), která je přítomna u výchozí geometrie. Důvod absence spočívá v inflačním zatížení, které vždy způsobuje zánik těchto lokálních tvarových imperfekcí. Celkově se ale deformovaný obraz redukované konfigurace a výchozí konfigurace dobře shodují. Navržená metoda pro nalezení „beznapětového stavu“ se tedy jeví jako dále aplikovatelná.

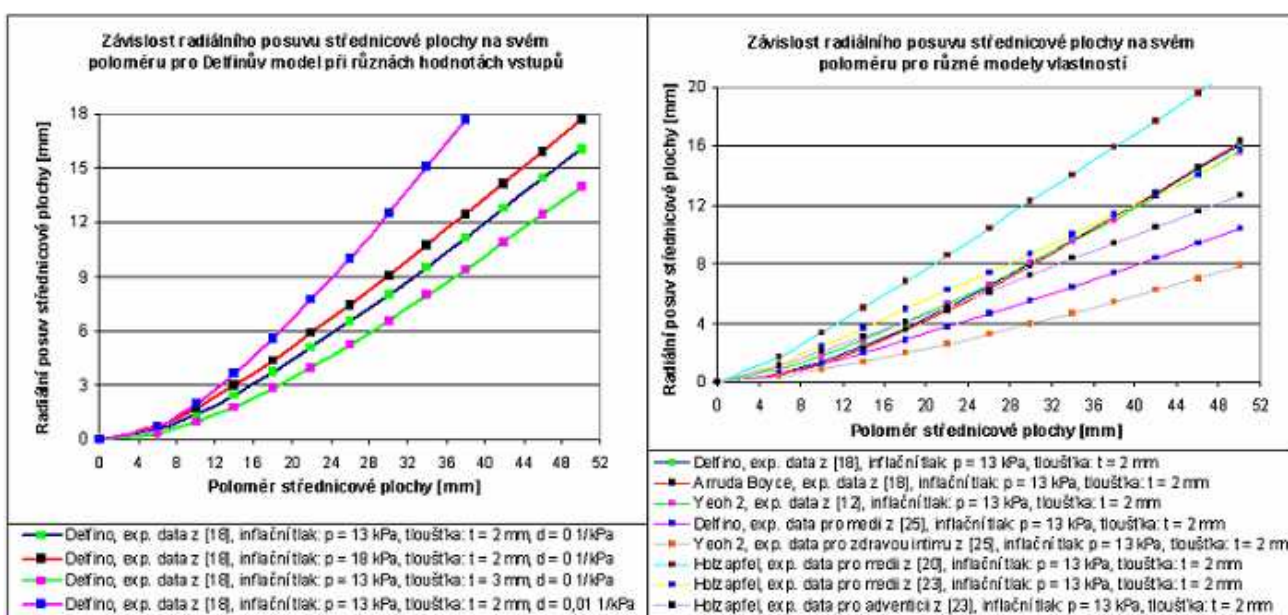


Obr. 22 – Výsledek testovací úlohy

7.1.2 Vliv vstupních parametrů na přesnost navrhované metody

Navrhovanou optimalizační metodou přiřazují pro konkrétní model vlastností, tloušťku prvku a velikost inflačního tlaku dvěma bodům každé vrstvy odpovídající radiální posuv, který zůstává stejný při odlehčení i zpětné inflaci. Model vlastností, tloušťka prvku a velikost inflačního tlaku se sice během optimalizace nemění, na velikost radiálního posuvu ale vliv mají.

Použijí-li model vlastností s vyšší počáteční tuhostí, zatížení způsobí pro libovolný poloměr menší radiální posuv. Uvažují-li objemovou stlačitelnost materiálu, závislost radiálního posuvu na poloměru se nezmění, je-li objemový modul pružnosti výrazně větší než modul pružnosti v tahu. Blíží-li se ale velikost objemového modulu tahovému, velikost radiálního posuvu pro stejný poloměr významně vzroste. Při zatížení krevním tlakem (při zpětné inflaci) větším než 13 kPa rovněž k nárůstu radiálního posuvu dochází. Zvětšením tloušťky prvku velikost radiálního posuvu naopak sníží (**Obr.23**).



Obr. 23 – Závislost radiálního posuvu střednicové plochy na různých vstupních parametrech

Tyto skutečnosti mě nutí provést přepočít výchozí geometrie na redukovanou i pro jiné modely vlastností, tloušťku řezu a velikost krevního (inflačního) tlaku, tj. ověřit do jaké míry tyto vstupní parametry ovlivňují přesnost navrhované metody. Za výchozí geometrii opět použiji příčný řez AAA, znázorněný na str. 36 (**Obr.18**). Počátek souřadného systému je umístěn ve středu otvoru výchozího řezu.

Vliv výběru modelu vlastností na přesnost navrhované metody

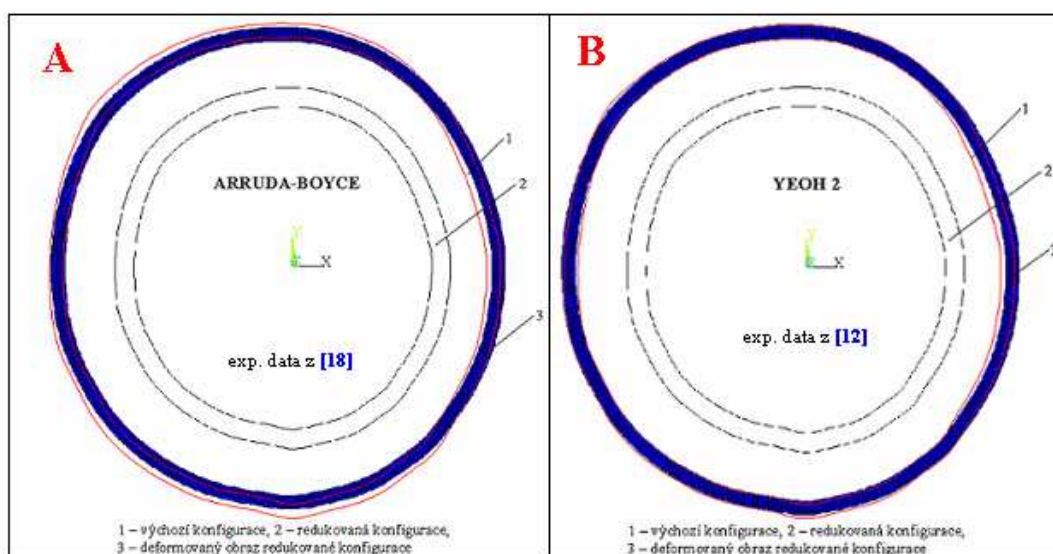
Přepočít výchozí geometrie na redukovanou, jejíž deformovaný obraz od krevního tlaku o velikosti 13 kPa se má výchozímu řezu blížit, provádím pro (vhodné i nevhodné) konstitutivní modely, které matematicky popisují deformačně-napěťové charakteristiky různých experimentálních vzorků. Stručný popis chování použitých modelů vlastností v této části při základních deformačně-napěťových stavech a jejich vzájemné srovnání uvádím v **[Tab.4]**.

<i>Případ</i>	<i>Konstitutivní model</i>	<i>„Chování modelu“ při jednoosém tahu</i>	<i>„Chování modelu“ při ekvibiaxiálním tahu</i>	<i>Radiální posuv střednicové plochy prvku pro poloměr $r = 50 \text{ mm}$ [mm]</i>
A	Arruda-Boyce	odpovídá chování exp. vzorku	odpovídá chování exp. vzorku	16,33
B	Yeoh 2	odpovídá chování exp. vzorku	odpovídá teoretickým předpokladům	15,67
C	Yeoh 2	odpovídá chování exp. vzorku	neodpovídá teoretickým předpokladům	7,92
D	Delfino	odpovídá chování exp. vzorku	neodpovídá teoretickým předpokladům	10,38
E	Holzapfel	odpovídá teoretickým předpokladům	odpovídá teoretickým předpokladům	21,47
F	Holzapfel	odpovídá teoretickým předpokladům	odpovídá teoretickým předpokladům	15,72

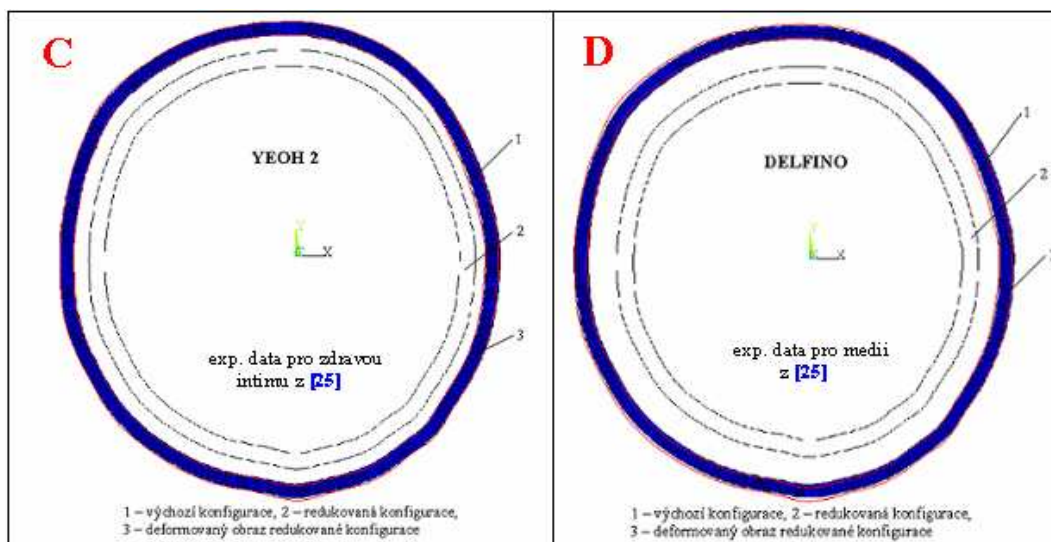
[Tab. 4] – Charakteristika použitých konstitutivních modelů pro přepočet geometrie

Výsledky na **Obr.24** ukazují, že volba konstitutivního modelu nemá na přesnost navrhované metody podstatný vliv. Ve všech případech se deformovaný obraz redukované geometrie velice blíží výchozí geometrii. Drobného rozdílu mezi deformovaným obrazem redukované geometrie a výchozí geometrií si lze všimnout pouze v případech **A** a **E**, kde výchozí geometrie je více vzdálená od středu než deformovaný obraz redukované geometrie. Procentuální rozdíl v obou případech ale nepřekračuje 5%. Určitá odchylka existuje ve všech případech i v pravé části, kde se deformovaný obraz redukované geometrie s výchozím řezem úplně neshoduje a více se vychyluje doprava. Další rozdíl pozorujeme ve spodní části, kde u deformovaného obrazu redukované geometrie zcela chybí lokální tvarová imperfekce, která je přítomná u výchozího řezu.

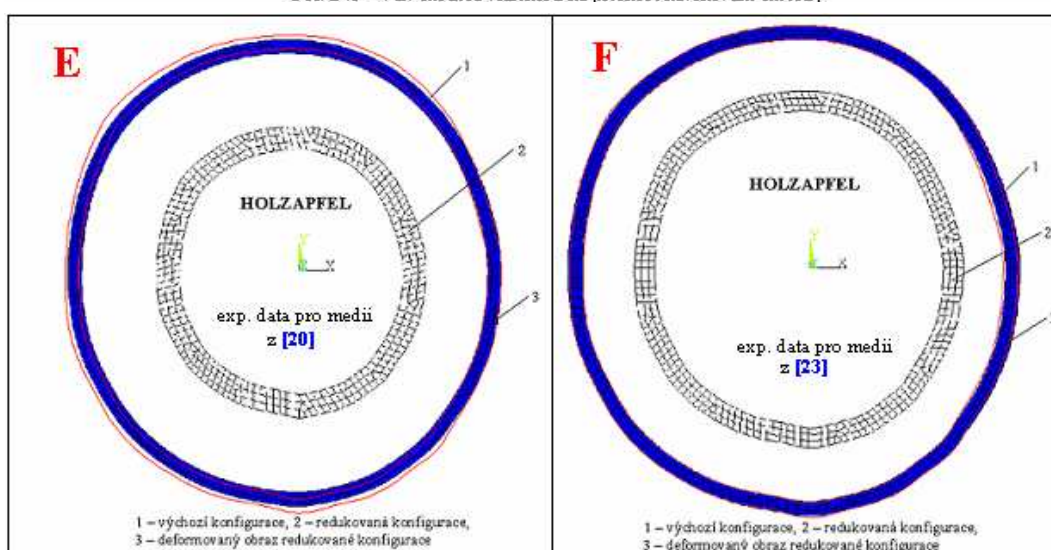
Celkový rozdíl mezi deformovaným obrazem redukované konfigurace a výchozí geometrií se ve všech případech ale pohybuje v jednotkách procent a lze tedy konstatovat, že volba konstitutivního modelu přesnost navrhované metody neovlivňuje.



Obr. 24a – Vliv modelu vlastností na přesnost navrhované metody



Obr. 24b – Vliv modelu vlastností na přesnost navrhované metody



Obr. 24c – Vliv modelu vlastností na přesnost navrhované metody

Vliv geometrie a zatížení na přesnost navrhované metody

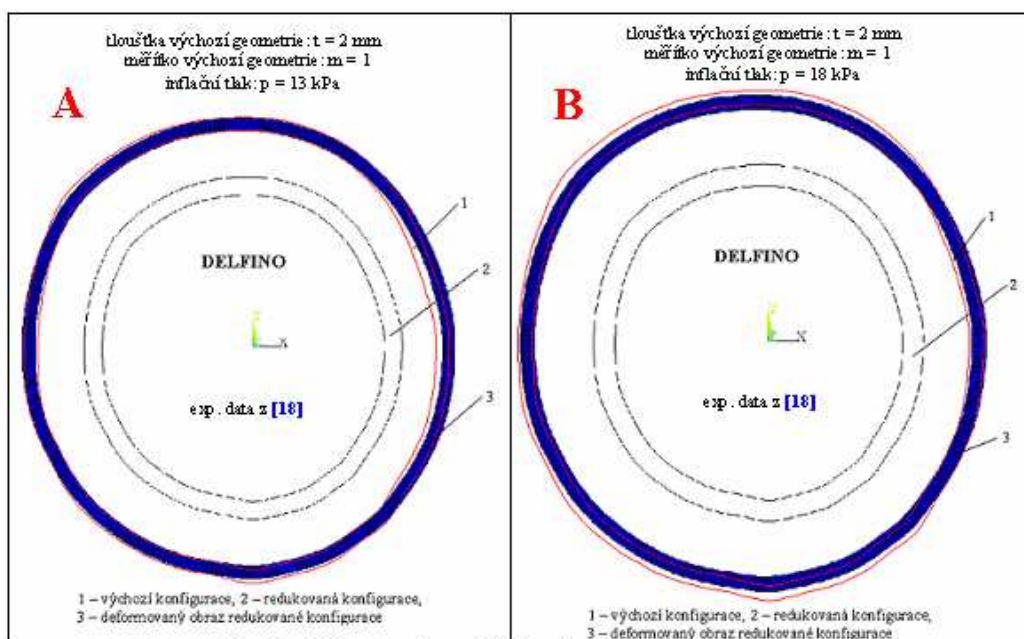
V této části se zaměřím na vliv geometrie a zatížení na přesnost navrhované metody.

Z geometrie mě nejvíce zajímá tloušťka výchozí konfigurace, tj. do jaké míry ovlivňuje za předpokladu její konstantní velikosti po celém obvodu řezu její různá hodnota přesnost navrhované metody. V případě **C** (Obr.25b) se tloušťka výchozí konfigurace rovná 3 mm, u zbylých **A**, **B**, **D** odpovídá 2 mm. U případu **D** (Obr.25b) navíc zmenším výchozí konfiguraci o 50% za účelem otestování vlivu velikosti radiální souřadnice na přesnost navrhované metody.

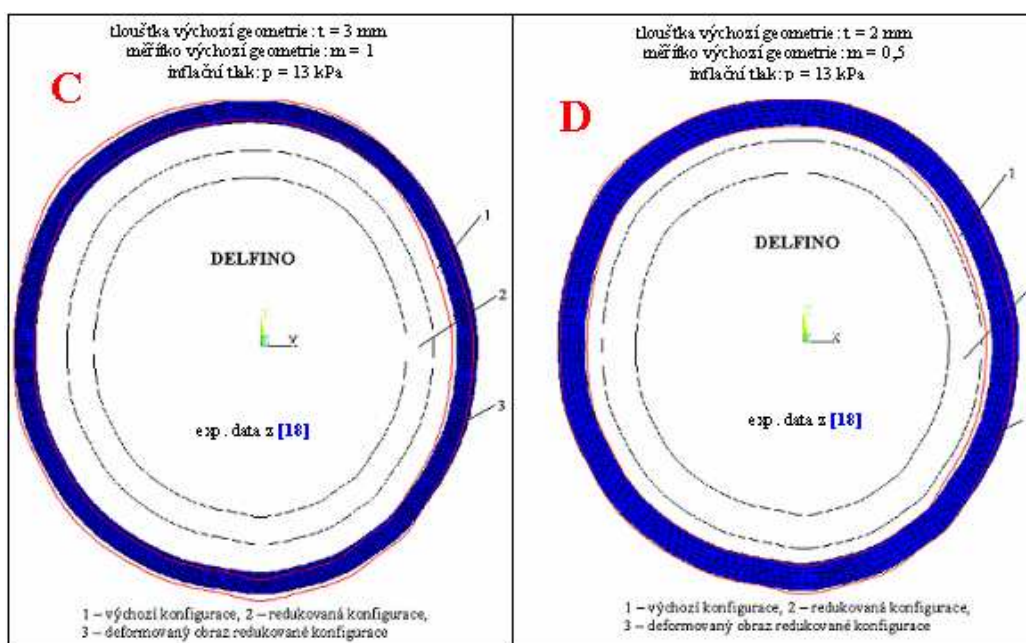
V případě **B** (Obr.25a) přiřazuji výchozí konfiguraci takovou redukovanou, jejíž deformovaný obraz od krevního tlaku o velikosti 18 kPa se má blížit výchozímu řezu výdutě, tj. testuji vliv velikosti zatížení na přesnost navrhované metody.

Případ **A** na Obr.25a ukazuje výsledky testovací úlohy navrhované metody z kapitoly 7.1.1 pro tloušťku výchozí geometrie o velikosti 2 mm a inflační tlak o velikosti 13 kPa.

Ve všech případech užívám stejný konstitutivní model Delfino (kapitola 5.3).



Obr. 25a – Vliv geometrie a zatížení na přesnost navržené metody



Obr. 25b – Vliv geometrie a zatížení na přesnost navržené metody

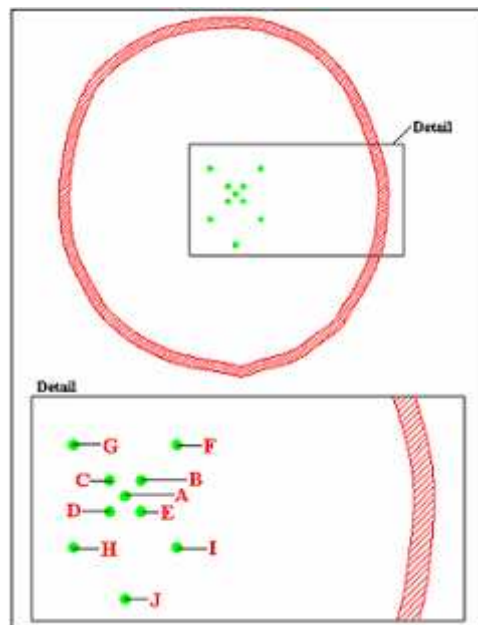
Výsledky na **Obr.25** ukazují, že jiná tloušťka nebo vzdálenost výchozí konfigurace od středu přesnost navržené metody neovlivňují (**A, C, D**). Ve všech třech případech jsou procentuální rozdíly mezi výchozí konfigurací a deformovaným obrazem redukované geometrie v pravé části vztažené k radiálnímu rozměru výchozího řezu srovnatelné.

Při přepočtu výchozího řezu výdutě na redukovaný pro inflační (krevní) tlak o velikosti 18 kPa (**B** na **Obr.25a**) ale kvalitativní změnu oproti **A, C, D** (**Obr.25**) pozorují. Deformovaný obraz redukované geometrie (**B**) se s výchozí v horizontálním směru narozdíl od **A, C, D** shoduje. Ve svislém směru je situace opačná. V případech **A, C, D** se deformovaný obraz redukované konfigurace blíží výchozímu, u případu **B** je deformovaný obraz redukované konfigurace menší než výchozí. Lze tedy konstatovat, že velikost krevního tlaku má vliv na přesnost navržené metody.

Vliv polohy počátku souřadného systému na přesnost navrhované metody

Přepočet výchozího řezu výdutě na redukovaný obraz lze uskutečnit pouze při znalosti radiálních souřadnic bodů výchozí geometrie, tj. známe-li polohu počátku souřadného systému, vzhledem kterému radiální souřadnice výchozího řezu určíme. Zde musím přiznat, že o poloze počátku souřadného systému obecně nic nevíme. Osobně zastávám názor, že korektně zjistíme radiální souřadnice bodů výchozího řezu, ztotožníme-li počátek souřadného systému se středem jeho otvoru. Zde ale vyvstává otázka, kde zmíněný střed otvoru přesně leží, jak stanovím jeho polohu.

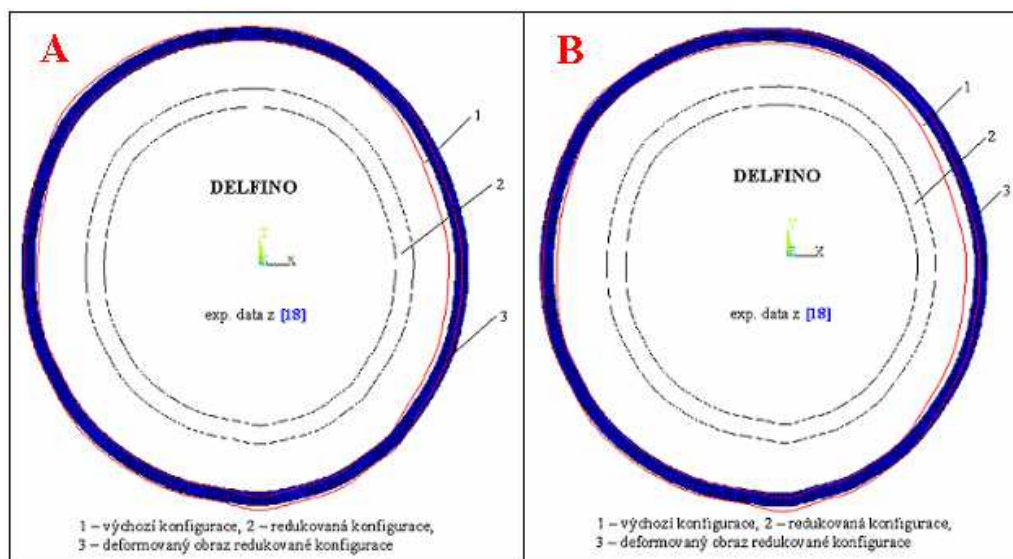
Pro určení polohy středu otvoru výchozího řezu se nabízí řada možností od jednoduchých „pomocí tužky a pravítka“, po složité experimentálně-výpočtové, při kterých hledáme maximum rychlostního profilu, které leží v prostřední části otvoru. Všechny nabízené metody pro stanovení polohy středu otvoru řezu jsou ale přibližné, přesnou polohu určit nelze, opakováním vždy získáme jiný bod, který reprezentuje střed otvoru řezu – počátek souřadného systému.



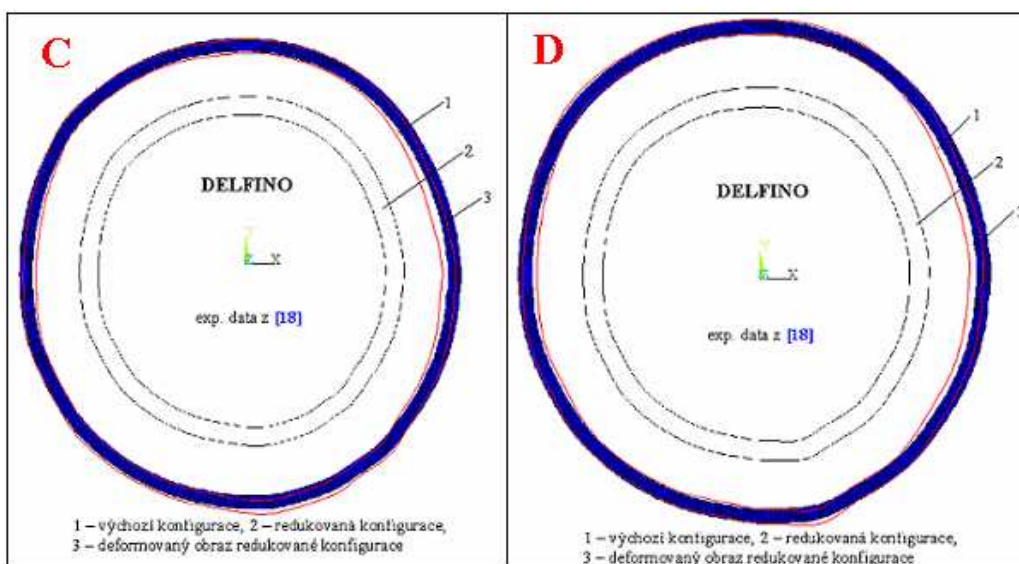
Obr. 26 – Poloha počátku souřadného systému

V této části se zaměřím na vliv polohy počátku souřadného systému, tj. do jaké míry různá poloha středu otvoru výchozího řezu (jiné radiální souřadnice bodů) ovlivní přesnost navrhované metody.

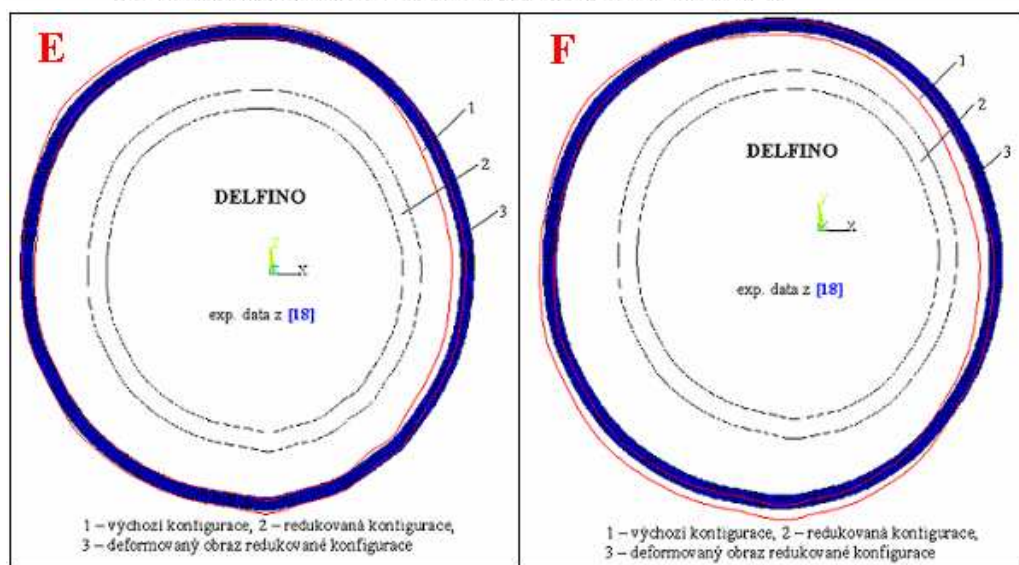
Pro deset různých libovolně zvolených počátků souřadného systému (**Obr.26**), kdy v každém použitém případě mají body výchozího řezu (str.36 – **Obr.18**) jiné radiální souřadnice, realizuji pro konstitutivní model Delfino (**kapitola 5.3**) a krevní tlak o velikosti 13 kPa přepočet výchozí geometrie výdutě na redukovanou, jejíž deformovaný obraz vlivem inflačního zatížení se má zpětně blížit výchozímu řezu.



Obr.27a – Vliv polohy počátku souřadného systému na přesnost navrhované metody

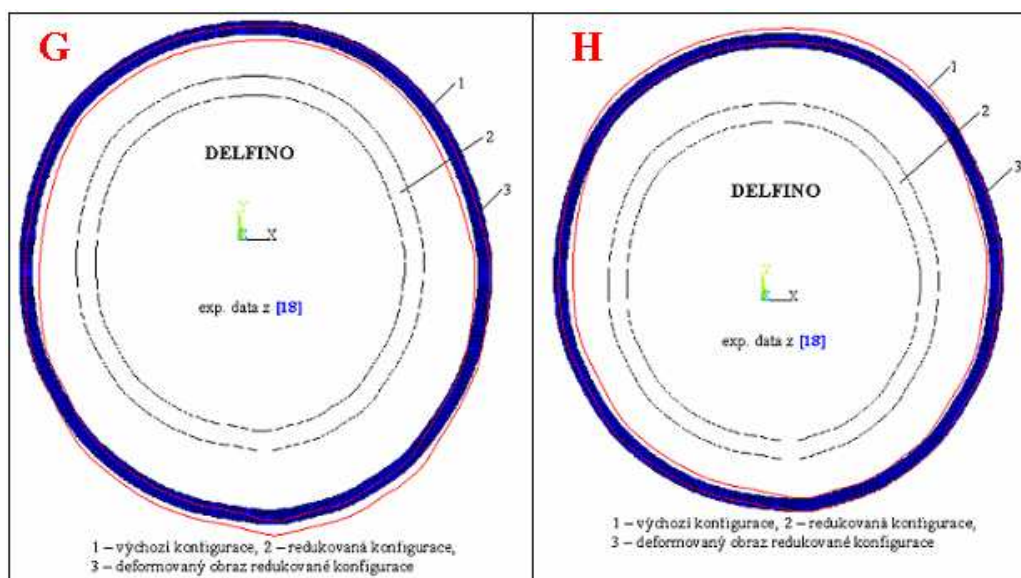


Obr.27b – Vliv polohy počátku souřadného systému na přesnost navržené metody

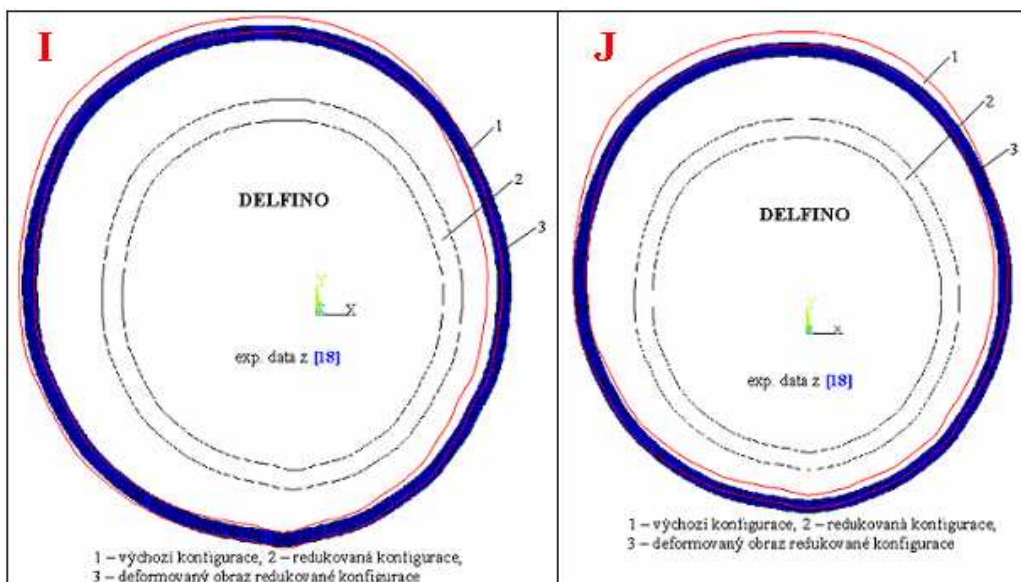


Obr.27c – Vliv polohy počátku souřadného systému na přesnost navržené metody

Výsledky na **Obr.27** ukazují, že v případech **F** až **J**, kde počátek souřadného systému je posunut ke stěně výdutě, se deformovaný obraz redukované geometrie s výchozím řezem neshoduje více než v případech **A** až **E**, u kterých počátek souřadného systému leží více ve středu otvoru. Zastávám názor, že tento nesouhlas nesouvisí s podstatou navržené metody. Domnívám se, že větší tvarový rozdíl mezi deformovaným obrazem redukované konfigurace a výchozím řezem výdutě v případech **F** až **J** na **Obr.27** je fyzikálního původu, kdy je snahou redukované konfigurace zaujmout vlivem zatížení nejméně energeticky náročný stav, tj. inflační tlak způsobí vzájemné přiblížení radiálních rozměrů a tedy deformovaný obraz redukované konfigurace tvarově více připomíná kruh. Tímto způsobem si vysvětluji větší kvalitativní rozdíl mezi deformovaným obrazem redukované konfigurace a výchozím řezem v případech **F** až **J** na **Obr.27**.



Obr.27d – Vliv polohy počátku souřadného systému na přesnost navržené metody



Obr.27e – Vliv polohy počátku souřadného systému na přesnost navržené metody

7.1.3 Redukovaná dvouvrstevná geometrie výdutě

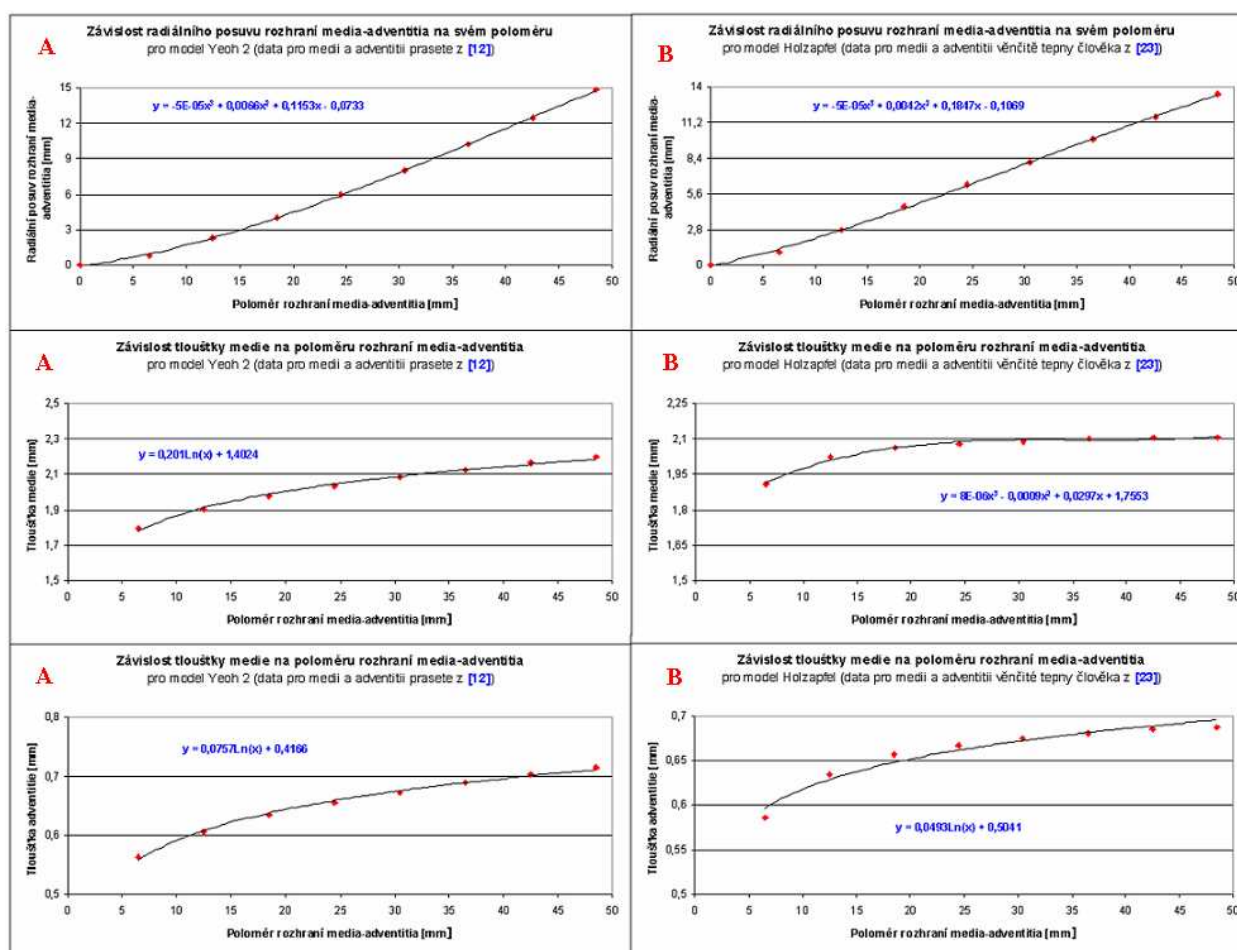
V návrhu metody předkládám teoretický postup pro stanovení redukované geometrie výdutě z výchozí, tvořené libovolným počtem vrstev. Nyní se pokusím o praktickou realizaci, kdy dvěma bodům každé vrstvy o konstantní tloušťce po celém obvodu výchozí dvouvrstevné geometrie výdutě přiřadím takovou redukovanou konfiguraci, jejíž deformovaný obraz v MKP od krevního tlaku o velikosti 13 kPa se bude blížit výchozí geometrii.

Za výchozí geometrii výdutě použiji jako v ostatních případech příčný řez AAA, znázorněný na str. 36 (**Obr.18**), s konstantní tloušťkou již dvou vrstev po celém obvodu. Tloušťka vnitřní vrstvy se rovná 1,5 mm, tloušťka vnější vrstvy odpovídá 0,5 mm. Počátek souřadného systému je zvolen ve středu otvoru řezu. Přepočet výchozí geometrie na redukovanou současně provedu pro dva případy, lišících se v použitém konstitutivním modelu obou vrstev:

A – hyperelastický izotropní konstitutivní model Yeoh 2 pro vnitřní i vnější vrstvu výdutě; materiálové parametry modelů popisují experimentální deformačně-napěťovou charakteristiku jednoosého tahu vnitřní a vnější vrstvy prasete domácího z [12].

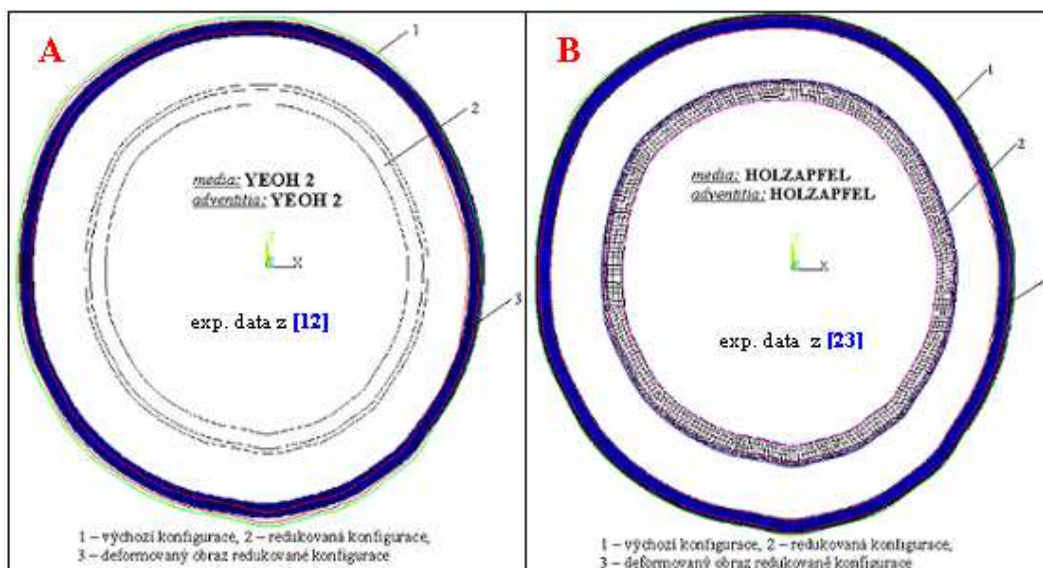
B – hyperelastický anizotropní konstitutivní model Holzapfel pro vnitřní i vnější vrstvu výdutě; materiálové parametry jsou převzaty z [23] pro medii ($c_{10} = 27 \text{ kPa}$; $k_1 = 0,64 \text{ kPa}$; $k_2 = 3,54$; $\varphi = 10^0$) a adventitii ($c_{10} = 2,7 \text{ kPa}$; $k_1 = 5,1 \text{ kPa}$; $k_2 = 15,4$; $\varphi = 40^0$) lidské věnčité tepny

Bodům na vnitřním, vnějším povrchu a na rozhraní mezi vrstvami prvku stanovím v případech **A** i **B** pro různé poloměry při zachování stejných tloušťek obou vrstev odpovídající radiální posuv, který zůstává stejný při odlehčení i zpětné inflaci. Poté sestrojím funkční závislosti radiálního posuvu rozhraní mezi vnější (medií) a vnitřní vrstvou (adventitií) na poloměru rozhraní a tloušťek obou vrstev prvku na poloměru rozhraní (**Obr.28**).



Obr. 28 – Regresní závislosti

Do získaných závislostí dosadím poloměr rozhraní každého prvku výchozího řezu a provedu přepočet jeho radiálních souřadnic. Výsledkem je nový redukovaný rozměr mezi vnější a vnitřní vrstvou a jejich nová tloušťka. Transformačními rovnicemi poté určím v kartézském souřadném systému polohu všech bodů na vnější, vnitřní ploše redukovaného řezu a na rozhraní mezi oběma vrstvami. Tuto redukovanou geometrii nakonec v MKP zatížím krevním tlakem o velikosti 13 kPa (**Obr.29**).



Obr. 29 – Přepočet výchozí dvouvrstevné geometrie

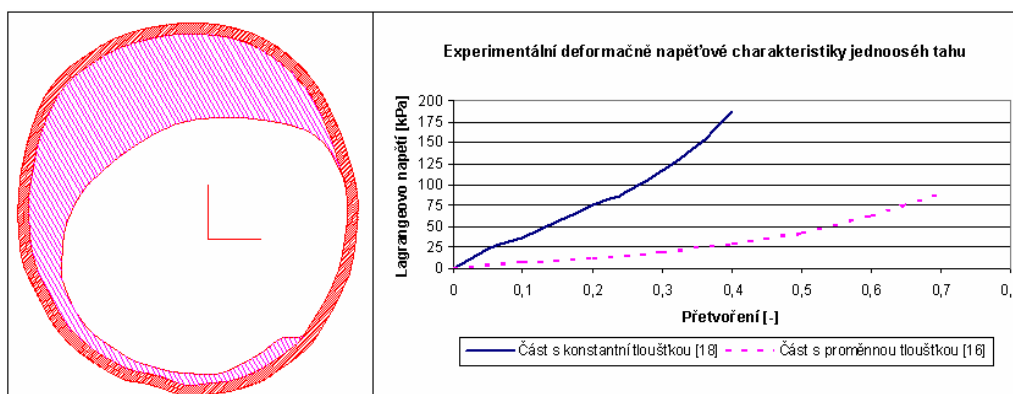
Deformovaný obraz redukované konfigurace se v případech **A** i **B** na **Obr.29** blíží výchozí konfiguraci. V případě **B** dokonce pozorujeme téměř ideální shodu mezi deformovaným obrazem redukované konfigurace a výchozí geometrií, kdy jediný rozdíl existuje pouze ve spodní části, kde u deformovaného obrazu redukované konfigurace chybí lokální tvarová imperfekce, přítomná u výchozí geometrie výdutě. V případě **A** je deformovaný obraz redukované konfigurace blíže k středu než výchozí dvouvrstevná geometrie výdutě, kdy maximální rozdíl mezi nimi dosahuje až 6%.

Celkově mezi deformovaným obrazem redukované konfigurace a výchozím řezem panuje dobrá shoda a lze tedy říci, že se úspěšně podařilo otestovat navrhovanou metodu i pro případ dvouvrstevné geometrie výdutě za předpokladu konstantní tloušťky obou vrstev po celém obvodu výchozího řezu.

Redukovaná dvouvrstevná geometrie výdutě o proměnné tloušťce vnitřní vrstvy

Přiřazení redukovaného obrazu výchozí geometrii výdutě s proměnnou tloušťkou stěny vyžaduje použití „zobecněného“ návrhu metody, tj. provedení dekompozici celého řezu na prvky o určité vzájemné rozteči a poté na každém prvku dvěma bodům každé vrstvy stanovení radiálního posuvu, který zůstává stejný při odlehčení i zpětné inflaci. Každému prvku výchozího řezu se musí tedy najít jeho redukovaný obraz.

Nyní se pokusím o přepočet dvouvrstevné geometrie, znázorněnou na **Obr.30**, u které se tloušťka vnitřní vrstvy po obvodu významně mění a tloušťka vnější vrstvy zůstává po celém obvodu přibližně konstantní o velikosti 2 mm. Počátek souřadného systému leží ve středu otvoru řezu. Pro část s konstantní tloušťkou použiji konstitutivní model Delfino (**kapitola 5.3**), pro popis vlastností části s tloušťkou proměnnou volím konstitutivní model Yeoh 2. stupně, jehož experimentální deformačně-napětová charakteristika jednoosého tahu pochází z **[16]**. Vzájemné srovnání experimentálních deformačně-napětových charakteristik, které slouží jako předloha pro konstitutivní modely obou částí výchozí řezu, ukazují rovněž na **Obr.30**. Z něj vyplývá, že vnitřní vrstva je mnohem poddajnější než vnější.



Obr.30 – Vstupní údaje pro přepočít dvouvrstevné geometrie s proměnnou tloušťkou

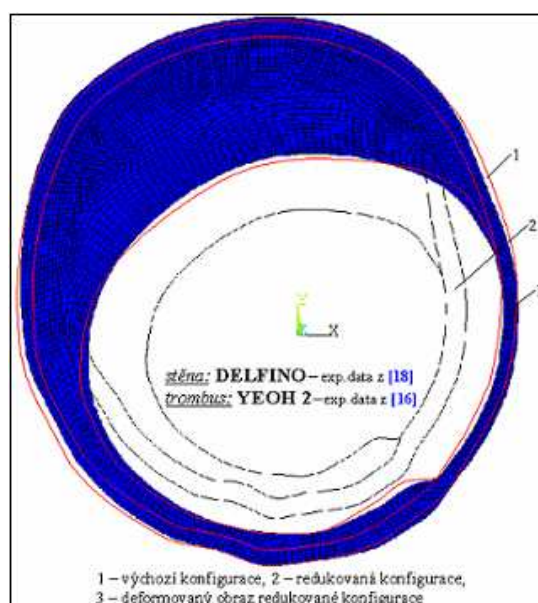
Provedu dekompozici výchozího řezu na prvky o vzájemné rozteči 15° . Poté dvěma bodům každé vrstvy stanovím u všech prvků odpovídající radiální posuv, který zůstává stejný při odlehčení i zpětné inflaci. Od radiálních souřadnic každého prvku řezu následně odečtu daný posuv a z redukovaných prvků sestavím redukovanou geometrii, kterou v MKP zatížím krevním tlakem o velikosti 13 kPa.

Výsledek přepočtu dvouvrstevné geometrie s proměnnou tloušťkou vnitřní vrstvy zobrazuji na **Obr.31**, na kterém pozorujeme patrnou shodu mezi deformovaným obrazem redukované konfigurace a výchozí geometrií výdutě. Maximální rozdíl mezi nimi nepřekračuje 10%. Drobné tvarové odchylky jsou způsobeny inflačním zatížením.

7.2 Zhodnocení a budoucnost navrhované metody

Navrhovaná metoda umožňuje přepočít výchozího řezu výdutě o libovolném počtu vrstev na geometrii redukovanou, jejíž deformovaný obraz vlivem krevního tlaku o dané velikosti se blíží výchozímu řezu. Vlastní přepočít se realizuje odečtením radiálního posuvu od radiální souřadnice každého bodu výchozího řezu. Nemění-li se po obvodu tloušťka všech vrstev výchozího řezu, lze pro jednoduchost vyjádřit radiální posuv jako funkci radiálních souřadnic. Nutnou podmínkou pro přepočít výchozí geometrie na redukovanou ale zůstává znalost radiálních souřadnic bodů výchozího řezu tj. polohy počátku souřadného systému.

Doposud stanovené výsledky testovacích úloh navrhované metody se zdají jako vyhovující, nejsou ale dostačující. Získáním rozsáhlejšího souboru výsledků, tj. testováním pro jiné modely vlastností a výchozí řezy výdutě bude možno formulovat přesnější závěry.



Obr.31 – Přepočít výchozí geometrie s trombem

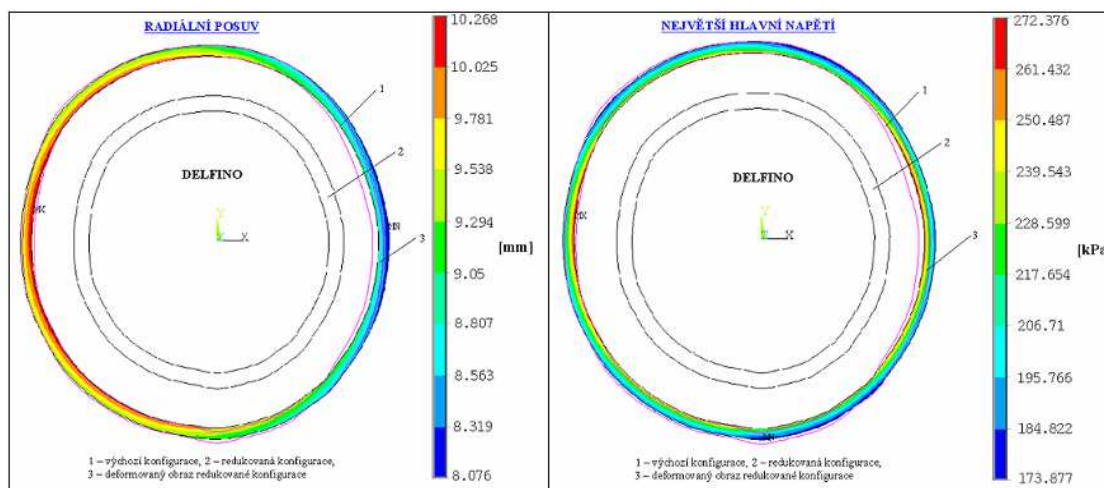
Navrhovaná metoda musí být otestována i na prostorovém modelu AAA, tj. všem řezům z CT se musí přiřadit patřičný redukovaný obraz, ze kterých se rekonstruuje redukovaný prostorový model výdutě.

8 DEFORMAČNĚ-NAPĚŤOVÁ ANALÝZA VÝDUTĚ TEPNY

V oblasti arteriálních výdutí nás vždy nejvíce zajímají možnosti hodnocení rizika ruptury – prasknutí. Stávající pozorovací metody, založené na velikosti (největším průměru), se totiž plně neosvědčují. V práci [16] byla proto navržena koncepce, která pravděpodobnost ruptury definuje jako funkci přírůstku největšího hlavního napětí ve výduti vzhledem k intaktní aortě. Tuto koncepci použiji i já, kdy prvně vytvořím výpočtový model výdutě břišní aorty, zohledňující její reálnou geometrii a konstitutivní chování. Poté ve stěně výdutě stanovím rozložení největšího hlavního napětí, které porovnam s největším hlavním napětím ve stěně válcové trubky o vnitřním průměru 19 mm a tloušťce stěny 2 mm (intaktní aorta), zatíženou vnitřním tlakem 20 kPa.

8.1 Jednovrstevný, izotropní výpočtový model výdutě

Model geometrie: - redukovaná jednovrstevná geometrie, která se po zatížení krevním tlakem o velikosti 13 kPa blíží výchozímu příčnému řezu (detailněji je tento případ rozebrán v kapitole 7.1.1) - na Obr.32 přináším informace o velikosti radiálního posuvu mezi redukovanou geometrií a jejím deformovaným obrazem, který téměř koresponduje s výchozím příčným řezem, a současně na Obr.32 ukazují i velikost a rozložení největšího hlavního napětí ve stěně deformovaného obrazu redukované konfigurace

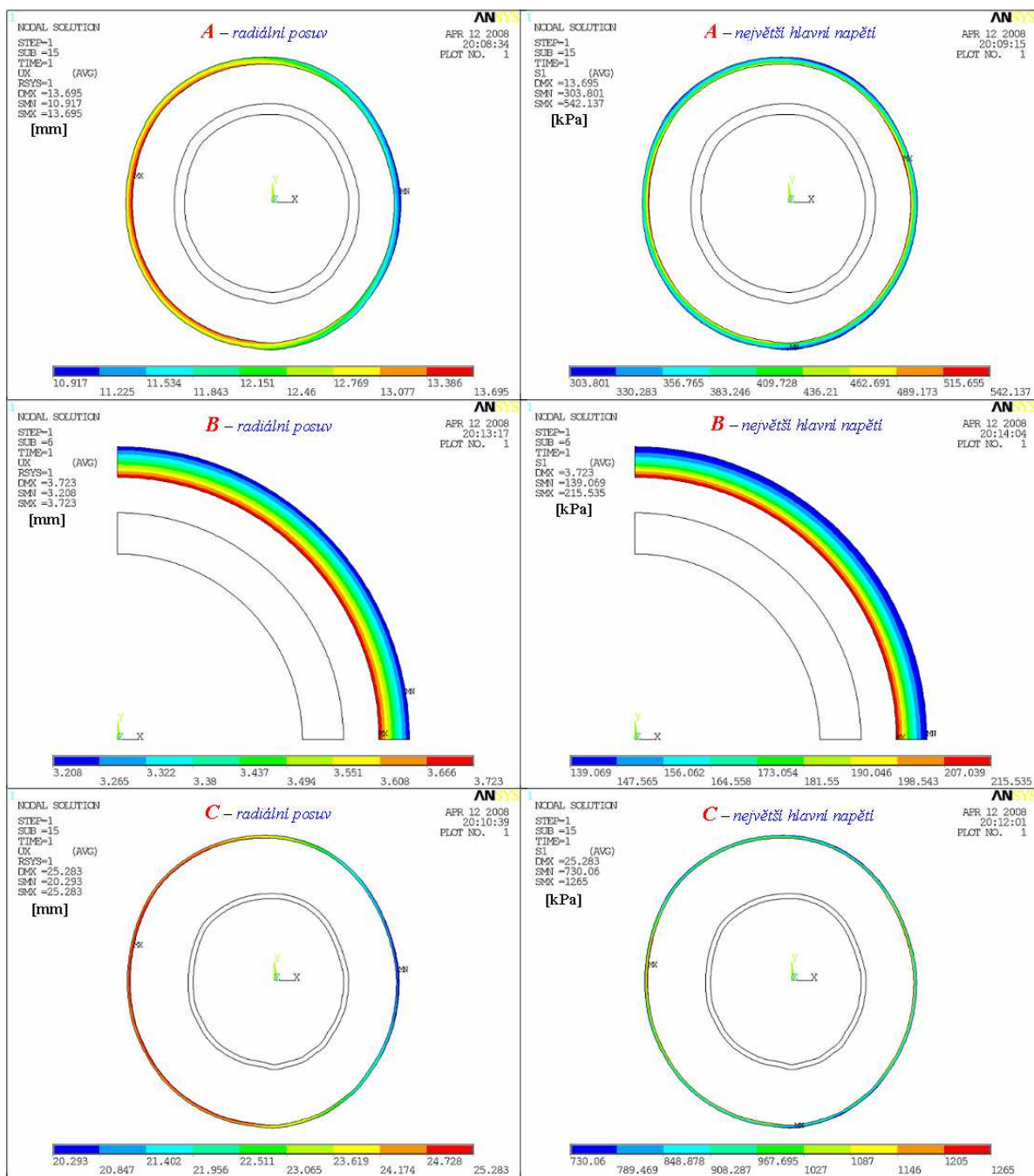


Obr. 32 – Redukovaná jednovrstevná geometrie výdutě

Model vazeb a zatížení: - řez v rovinné deformaci s nulovými obvodovými posuvy každého uzlu v jeho souřadném systému, zatížený vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa (kapitola 6)

Model vlastností: - hyperelastický, izotropní konstitutivní model Delfino (kapitola 5.3.1)

Výsledky deformačně-napěťové analýzy jednovrstevného izotropního modelu výdutě jsou znázorněny na Obr.33. Případ A na Obr.33 ukazuje velikost a rozložení radiálního posuvu resp. největšího hlavního napětí uvnitř stěny výdutě po zatížení její redukované geometrie vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa. V případě B na Obr.33 se jedná o velikost a rozložení radiálního posuvu resp. největšího hlavního napětí uvnitř intaktní aorty – válcové trubky o vnitřním průměru 19 mm a tloušťce 2 mm, zatíženou vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa. Případ C na Obr.33 ukazuje velikost a rozložení radiálního posuvu resp. největšího hlavního napětí uvnitř stěny výdutě po zatížení její výchozí (původní) neredukované geometrie vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa.

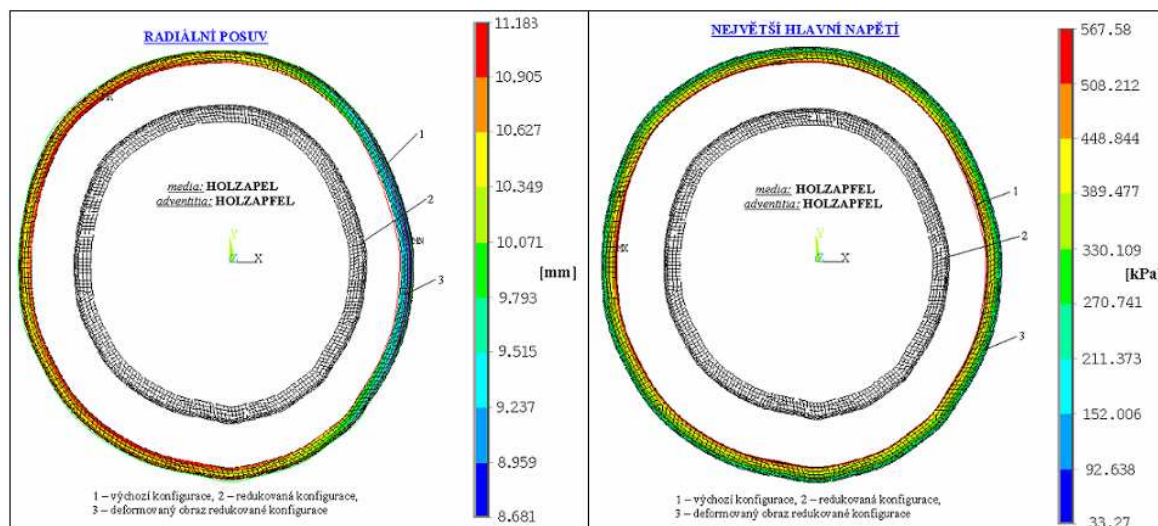


Obr. 33 – Deformačně-napěťová analýza jednovrstvého izotropního modelu výdutě

Největší hlavní napětí v intaktní aortě (případ B na Obr.33), zatížené vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa, dosahuje na vnitřním povrchu maxima o hodnotě **215 kPa**. Zatížím-li tímto tlakem redukovanou geometrii výdutě (případ A na Obr.33), pak největší hlavní napětí nabývá ve stěně jejího deformovaného obrazu lokálně až **540 kPa**. V porovnání s intaktní aortou se tedy maximum největšího hlavního napětí zvýšilo o **150%**. Při zatížení výchozí geometrie výdutě (případ C na Obr.33), stejným tlakem jako v předešlých případech, překračuje největší hlavní napětí v její stěně i **1250 kPa**. V porovnání s intaktní aortou se tedy maximum největšího hlavního napětí zvýšilo o **480%**. Relativní rozdíl mezi maximem největšího hlavního napětí ve stěně deformovaného obrazu redukované a výchozí geometrie výdutě se blíží **130%**.

8.2 Dvoustevný, anizotropní výpočtový model výdutě bez trombu

Model geometrie: - redukovaná dvoustevná geometrie, která se po zatížení krevním tlakem o velikosti 13 kPa blíží výchozí (detailněji je tento případ rozebrán v kapitole 7.1.3 – případ B) - na Obr.34 jsou výsledky radiálního posuvu mezi redukovanou geometrií a jejím deformovaným obrazem, který téměř koresponduje s výchozím příčným řezem, a současně na Obr.34 ukazují i velikost a rozložení největšího hlavního napětí ve stěně deformovaného obrazu redukované konfigurace

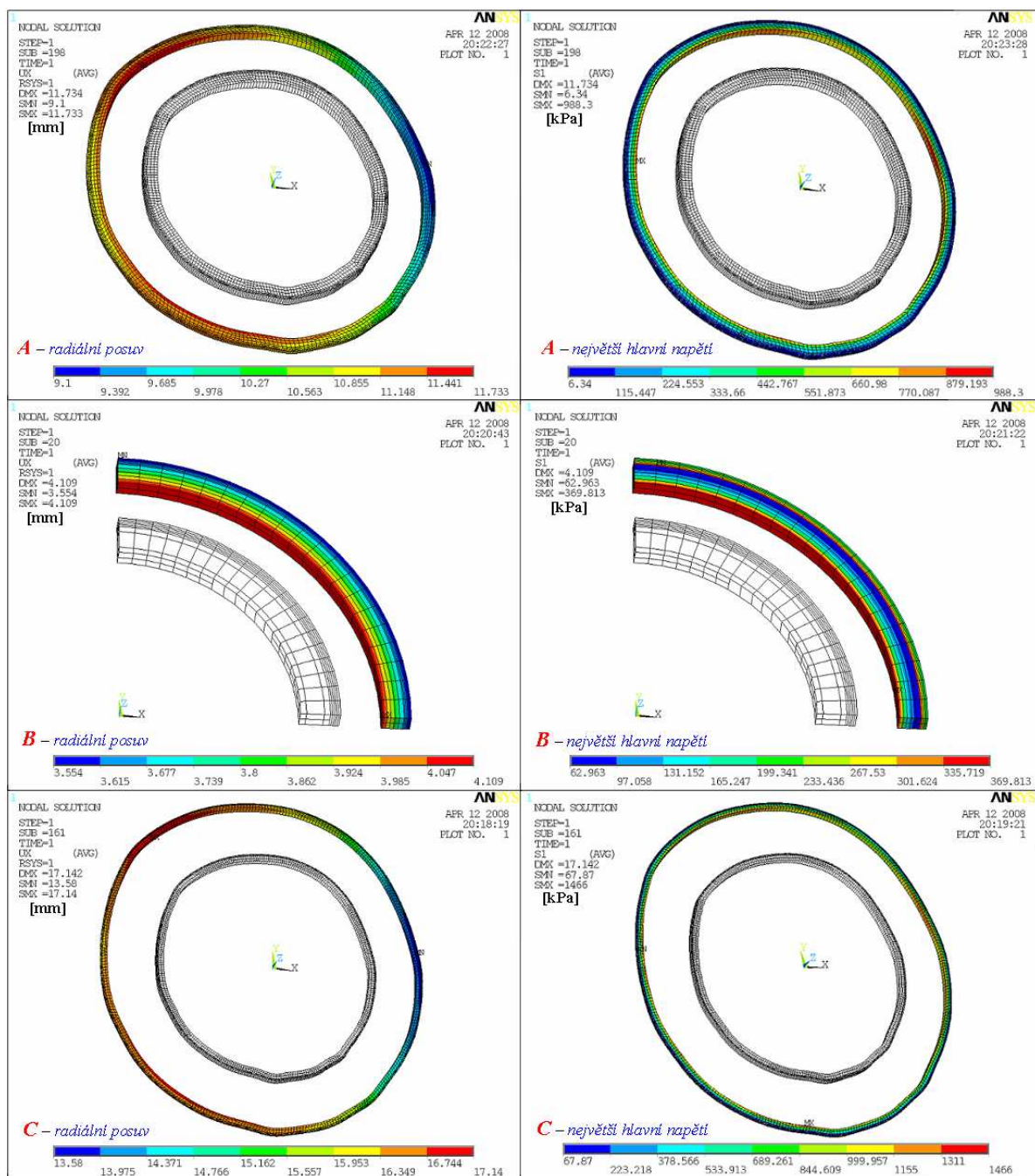


Obr. 34 – Redukovaná dvoustevná geometrie výdutě bez trombu

Model vazeb a zatížení: - prostorová trubka se zabráněnými podélnými posuvy horní a spodní plochy a s nulovými obvodovými posuvy všech uzlů v jejich souřadném systému, kdy trubka je zatížena vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa (kapitola 6) a směrové vlastnosti jsou předepsány v kartézském souřadném systému každého uzlu jako funkce jeho polohy [19]

Model vlastností: - pro obě vrstvy: hyperelastický, anizotropní konstitutivní model Holzapfel (kapitola 5.4)

Výsledky deformačně-napěťové analýzy dvoustevného anizotropního modelu výdutě jsou znázorněny na Obr. 35. Případ A na Obr.35 ukazuje velikost a rozložení radiálního posuvu resp. největšího hlavního napětí uvnitř stěny výdutě po zatížení její redukované geometrie vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa. V případě B na Obr.35 se jedná o velikost a rozložení radiálního posuvu resp. největšího hlavního napětí uvnitř intaktní aorty – válcové trubky o vnitřním průměru 19 mm a tloušťce 2 mm, zatíženou vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa. Případ C na Obr.35 ukazuje velikost a rozložení radiálního posuvu resp. největšího hlavního napětí uvnitř stěny výdutě po zatížení její výchozí (původní) neredukované geometrie vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa.

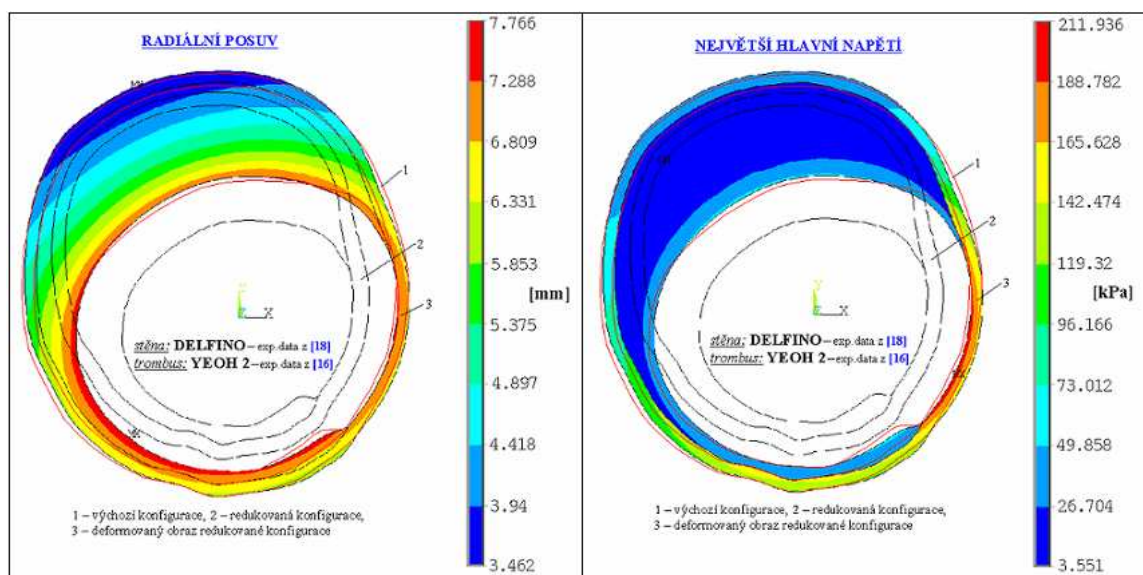


Obr. 35 – Deformačně-napěťová analýza dvouvrstvého anizotropního modelu výdutě bez trombu

Maximum největšího hlavního napětí v intaktní aortě (případ **B** na **Obr.35**), zatížené vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa, se na vnitřním povrchu i na rozhraní mezi oběma vrstvami blíží **370 kPa**. Stejný tlak způsobuje u deformovaného obrazu redukované geometrii výdutě (případ **A** na **Obr.35**) lokální maximum největšího hlavního napětí o hodnotě **990 kPa**. V porovnání s intaktní aortou se tedy maximum největšího hlavního napětí zvýšilo o **170%**. Zatížím-li výchozí geometrii výdutě (případ **C** na **Obr.35**) krevním tlakem o velikosti 20 kPa, pak největší hlavní napětí nabývá maxima kolem **1460 kPa**. V porovnání s intaktní aortou se tedy hodnota největší hlavního napětí zvýšilo o **300%**. Relativní rozdíl mezi největším hlavním napětím ve stěně deformovaného obrazu redukované a výchozí geometrie výdutě se blíží 50%.

8.3 Dvouvrstevný, izotropní výpočtový model výdutě s trombem

Model geometrie: - redukovaná dvouvrstevná geometrie (vnější vrstva reprezentuje část bez trombu, vnitřní vrstva představuje trombus), která se po zatížení krevním tlakem o velikosti 13 kPa blíží výchozí (detailněji je tento případ rozebrán v kapitole 7.1.3) - na Obr.36 ukazují velikost a rozložení radiálního posuvu mezi redukovanou geometrií a jejím deformovaným obrazem, který téměř koresponduje s výchozím příčným řezem, a současně Obr.36 přináší informace o velikosti a rozložení největšího hlavního napětí ve stěně deformovaného obrazu redukované konfigurace

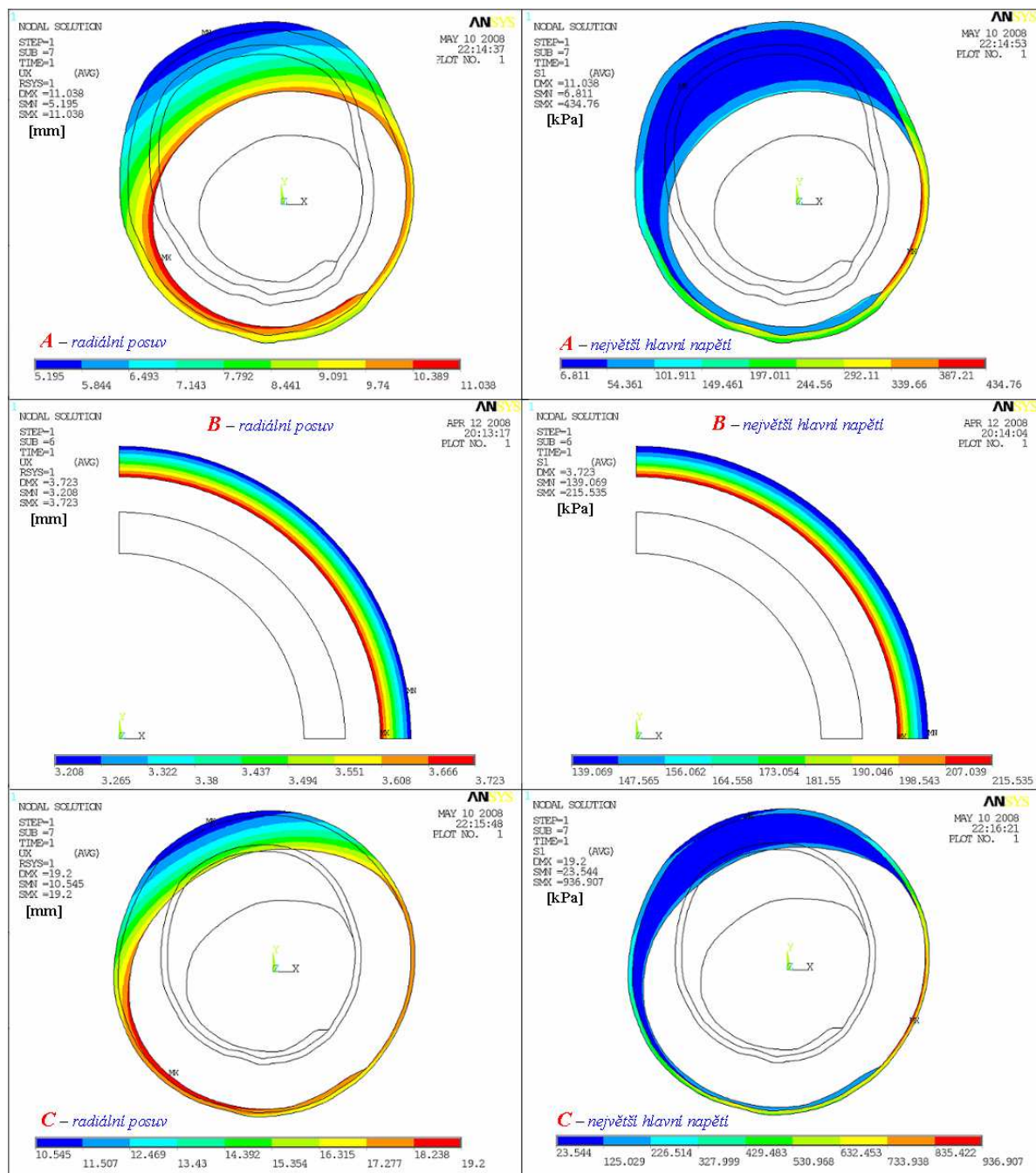


Obr. 36 – Redukovaná dvouvrstevná geometrie výdutě s trombem

Model vazeb a zatížení: - řez v rovinné deformaci s nulovými obvodovými posuvy každého uzlu v jeho souřadném systému, zatížený vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa (kapitola 6)

Model vlastností: - část bez trombu: hyperelastický, izotropní konstitutivní model Delfino (kapitola 5.3.1), část s trombem: hyperelastický, izotropní konstitutivní model Yeoh2 (kapitola 5.3.1)

Výsledky deformačně-napěťové analýzy dvouvrstevného izotropního modelu výdutě s trombem jsou znázorněny na Obr.37. Příklad A na Obr.37 ukazuje velikost a rozložení radiálního posuvu resp. největšího hlavního napětí uvnitř stěny výdutě po zatížení její redukované geometrie vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa. V případě B na Obr.37 se jedná o velikost a rozložení radiálního posuvu resp. největšího hlavního napětí uvnitř intaktní aorty – válcové trubky o vnitřním průměru 19 mm a tloušťce 2 mm, zatíženou vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa. Příklad C na Obr.37 ukazuje velikost a rozložení radiálního posuvu resp. největšího hlavního napětí uvnitř stěny výdutě po zatížení její výchozí (původní) neredukované geometrie vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa.



Obr. 37 – Deformačně-napěťová analýza dvouvrstevného izotropního modelu výdutě bez trombu

Největší hlavní napětí v intaktní aortě (případ B na Obr.37), zatížené vnitřním tlakem o velikosti 20 kPa, dosahuje na vnitřním povrchu maxima o hodnotě **215 kPa**. Zatížím-li tímto tlakem redukovanou geometrii výdutě (případ A na Obr.37), pak největší hlavní napětí nabývá ve stěně jejího deformovaného obrazu lokálně až **435 kPa**. V porovnání s intaktní aortou se tedy maximum největšího hlavního napětí zvýšilo o **100%**. Zatížím-li výchozí geometrii výdutě (případ C na Obr.37) krevním tlakem o velikosti 20 kPa, pak největší hlavní napětí nabývá maxima kolem **940 kPa**. V porovnání s intaktní aortou se tedy hodnota největší hlavního napětí zvýšilo o **340%**. Relativní rozdíl mezi největším hlavním napětím ve stěně deformovaného obrazu redukované a výchozí geometrie výdutě se blíží **120%**.

8.4 Zhodnocení výsledků deformačně-napětové analýzy výdutě tepny

Za účelem deformačně-napětové analýzy výdutě tepny byly vytvořeny tři zcela rozdílné výpočtové modely.

V prvním případě (**kapitola 8.1**) model geometrie představoval jednovrstevnou redukovanou konfiguraci, kdy výchozí geometrie měla po obvodu konstantní tloušťku, a model vlastností patřil do skupiny hyperelastických izotropních, matematicky popisující experimentální deformačně-napětové charakteristiky jednoosého a ekvibiaxiálního tahu čtvercového vzorku hrudní aorty prasete domácího. V druhém případě (**kapitola 8.2**) za model geometrie výdutě byla zvolena dvouvrstevná redukovaná konfigurace, kdy tloušťky obou vrstev se po obvodu výchozího řezu neměnily, a modely vlastností pocházely ze skupiny hyperelastických anizotropních, přičemž materiálové parametry byly převzaty přímo z literatury pro vzorek lidské věnčité tepny.

V třetím případě (**kapitola 8.3**) za model geometrie byla vybrána dvouvrstevná redukovaná konfigurace, kdy vnější vrstva výchozího řezu měla po celém obvodu konstantní tloušťku a tloušťka vnitřní vrstvy se po obvodu výrazně měnila. Modely vlastností obou vrstev patřily do skupiny hyperelastických izotropních. Experimentální předloha konstitutivního modelu pro vnitřní vrstvu představovaly deformačně-napětové charakteristiky jednoosého a ekvibiaxiálního tahu vzorku hrudní aorty prasete domácího. Pro popis vlastností vnitřní vrstvy (trombu) byla přímo z literatury převzata deformačně-napětová charakteristika jednoosého tahu, která je výrazně poddajnější než charakteristika jednoosého tahu vnější vrstvy.

Všechny výpočtové modely se tedy jeví jako zcela odlišné. V jejich výsledcích ale podobnosti najít můžeme. (**Obr.33, 35, 37**)

V všech případech největší hlavní napětí dosahuje maxima na vnitřním povrchu v oblasti nejvíce vzdálené od středu výdutě. Hodnota maxima největšího hlavního napětí je rovněž ve všech případech vyšší ve výduti než ve stěně intaktní aorty. Nahradíme-li dále redukovanou geometrii výdutě její výchozí, pak ve všech případech k nárůstu maxima největšího hlavního napětí rovněž dojde. Poloha maxima největšího hlavního napětí v deformovaném obraze výchozího řezu se u výpočtových modelů bez trombu shoduje s polohou maxima ve stěně deformovaného obrazu redukované konfigurace. U výpočtového modelu s trombem se při použití výchozí konfigurace maximum největšího hlavního napětí přesouvá z místa nejvíce vzdáleného od středu (oblast trombu) do oblasti bez trombu.

Číselné hodnoty (výsledky) napětí a posuvů mají ve všech případech pouze ilustrativní charakter, neexistuje žádný způsob jejich verifikace. Při použití jiného modelu vlastností či jiného modelu geometrie získáme jiné hodnoty. Správnost dosažených výsledků tedy posuzují pouze kvalitativně na základě řádu čísla (napětí, posuvu). Zde „zkušenosti“ (výsledky výpočtového modelování) ukazují, že napětí se pohybují v řádu stovek kPa a posuvy v řádu jednotek mm. Těmto závěrům odpovídají i napětí a posuvy v této práci. Pravděpodobnost ruptury určit neumím, neboť doposud chybí korektní kritérium její definice. Srovnání maxim největšího hlavního napětí ve výduti a intaktní aortě má pouze ilustrativní charakter.

9 ZÁVĚR

Předkládaná diplomová práce se zabývala vytvořením reálného výpočtového modelu arteriální výdutě a následným stanovením napjatosti a deformace uvnitř její stěny.

Oproti stávajícím pracím se zaměřila na nalezení metody pro určení „nezatížené“ = „beznapěťové“ = „prvotní“ = **zmenšené (redukované)** geometrie výdutě, kterou obecně neznáme. Řešení celého problému znesnadňovala skutečnost, že jakékoliv studie zabývající se hledáním redukované geometrie doposud chybí.

Přesto se v této práci podařilo formulovat návrh metody, který výchozí geometrii výdutě přiřadí její redukovaný obraz, který se po zatížení krevním tlakem o dané velikosti s výchozí téměř shoduje. Následné testování návrhu metody bylo úspěšně provedeno na třech úlohách:

1. *rovinný, jednovrstevný, transversální řez výdutě s konstantní tloušťkou po celém obvodu řezu*
2. *„rovinný“, dvouvrstevný, transversální řez výdutě s konstantní tloušťkou obou vrstev po celém obvodu řezu*
3. *rovinný, dvouvrstevný, transversální řez výdutě po celém obvodu s konstantní tloušťkou vnější vrstvy a s výrazně proměnnou tloušťkou vnitřní vrstvy*

Tyto výsledky jsou tedy určitým příslibem pro další pokračování a rozvoj metody pro nalezení redukované geometrie výdutě.

Mimo to byly v této práci úspěšně otestovány u nás doposud nepoužívané konstitutivní modely Delfino a Holzapfel.

POUŽITÁ MÉDIA

- [1] Sinělnikov– *Atlas anatomie člověka*, Avicenum, 1970
- [2] Netter – *Anatomický atlas člověka*, Grada, 2003
- [3] Bednář – *Patologie*, Avicenum, 1987
- [4] Krajiček, Peregrin, Roček, Šebesta a kol. – *Chirurgická a intervenční léčba cévních onemocnění*, Grada, 2007
- [5] Janíček, Ondráček, Vrbka, Burša – *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*, CERM, 2004
- [6] Ondráček, Vrbka, Janíček – *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II*, CERM, 2002
- [7] Brdička, Samek, Sopko – *Mechanika kontinua*, Academia, 2005
- [8] Petruška, Burša – *Nelineární úlohy mechaniky v MKP*, 2006
- [9] Janíček, Ondráček – *Řešení problémů modelováním*, CERM, 1998
- [10] Ansys: *User´s manual*, www.ansys.com
- [11] Abaqus: *User´s manual*, www.abaqus.com
- [12] Burša – *Disertační práce: Analýza napjatosti a deformace ve stěně tepny*, CERM, 1999
- [13] Horný – *Přednáška z cévní mechaniky a experimentu*, www.biomechanika.cz, 2007
- [14] Burša – *Habilitační práce: Výpočtové modelování mechaniky živých a neživých těles z kompozitních materiálů umožňujících velké deformace*, 2006
- [15] Skácel – *Disertační práce: Výpočtové a experimentální modelování deformačně napjatostních a mezních stavů elastomerů a jejich rozhraní s tuhými materiály*, CERM, 2005
- [16] Ryšavý – *Pojednání ke státní doktorské zkoušce: Deformačně-napěťová analýza aneurysmatu břišní aorty*, 2005
- [17] Burša, Skácel, Zemánek, Kreuter – *Conference: Implementation of hyperelastic materials for soft tissues in FE program and identification of their parameters*, 2008
- [18] Zemánek, Burša – *Conference: Identification of parameters of constitutive models for soft tissues from biaxial tension tests*, Svratka, 2007
- [19] Skácel – *Ansys tutorial macro file demonstrating capability of user-defined material model – anisotropic hyperelasticity*, 2007
- [20] Holzapfel, Gasser, Ogden - *A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models*, Journal of Elasticity, 2000, str. 1 - 48
- [21] Holzapfel, Gasser - *A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, str. 4379 – 4403
- [22] Bergstrom, Kurtz, Rinmac, Edidin – *Constitutive modeling of ultra-high molecular weight polyethylene under large deformation and cyclic conditions*, Biomaterials, 2001, str. 2329 - 2343

- [23] *Holzapfel, Gasser, Stadler - A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis*, European Journal of Mechanics A/Solids 21, 2002, str. 441 – 463
- [24] *Schulze-Bauer, Holzapfel – Determination of constitutive equations for human arteries from clinical data*, Journal of Biomechanics, 2002, str. 165 - 169
- [25] *Holzapfel, Sommer – Anisotropic mechanical properties of tissue components in human atherosclerotic plaques*, Journal of Biomechanical Engineering, 2004, str. 657 – 665
- [26] *Holzapfel – Similarities between soft biological tissues and rubberlike materials*, Balkema Publishers, 2005, str. 607 – 617
- [27] *Gasser, Ogden, Holzapfel – Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations*, Journal of the Royal Society Interface, 2005, str. 15 – 35
- [28] *Wu, Levenston, Chaikof – A constitutive model for protein-based materials*, Biomaterials, 2006, str. 5315 - 5325
- [29] *Holzapfel, Gasser – Computational stress-deformation analysis of arterial walls including high-pressure response*, International Journal of Cardiology, 2007, str. 78 – 85
- [30] *Holzapfel, Ogden – On planar biaxial tests for anisotropic nonlinearly elastic solids. A continuum mechanical framework*, Mathematics and Mechanics of solids, in press
- [31] *Rodríguez, Ruiz, Doblaré, Holzapfel – Mechanical stresses in abdominal aortic aneurysms: influence of diameter, asymmetry and material anisotropy*, ASME Journal of Biomechanical Engineering, in press
- [32] *Sommer, Gasser, Regitnig, Auer, Holzapfel – Dissection properties of the human aortic media: an experimental study*, ASME Journal of Biomechanical Engineering, in press
- [33] *Valenta – Biomechanika*, Academia, 1985